



# Modélisation directe et inverse d'écoulements géophysiques viscoplastiques par méthodes variationnelles - Application à la glaciologie

Nathan Martin

## ► To cite this version:

Nathan Martin. Modélisation directe et inverse d'écoulements géophysiques viscoplastiques par méthodes variationnelles - Application à la glaciologie. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. INSA de Toulouse, 2013. Français. NNT : 2013ISAT0021 . tel-00920189

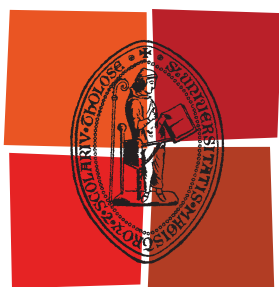
**HAL Id: tel-00920189**

**<https://theses.hal.science/tel-00920189>**

Submitted on 18 Dec 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

**Délivré par :**

Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA Toulouse)

**Discipline ou spécialité :**

Mathématiques Appliquées

---

**Présentée et soutenue par :**

Nathan Martin

**le :** mercredi 10 juillet 2013

**Titre :**

Modélisation directe et inverse d'écoulements géophysiques viscoplastiques  
par méthodes variationnelles - Application à la glaciologie

---

**Ecole doctorale :**

Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

**Unité de recherche :**

Institut de Mathématiques de Toulouse

**Directeur(s) de Thèse :**

Jérôme Monnier - Professeur des universités, INSA, IMT

**Rapporteurs :**

Stéphane Cordier - Professeur des universités, Université d'Orléans, MAPMO

Richard C.A. Hindmarsh - British Antarctic Survey, Cambridge

Marco Picasso - Professeur, Chaire d'Analyse et Simulation Numérique, EPFL, Lausanne

**Membre(s) du jury :**

Patrick Hild - Professeur des universités, Université Paul Sabatier, IMT

Benoît Legrésy - Chargé de Recherches CNRS, LEGOS

Raphaël Loubère - Chargé de Recherches CNRS, IMT

Antoine Rousseau - Chargé de Recherches INRIA, Moise



# THÈSE

**Discipline ou spécialité :** Mathématiques appliquées

**École doctorale :** Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

---

## Modélisation directe et inverse d'écoulements géophysiques viscoplastiques par méthodes variationnelles - Application à la glaciologie

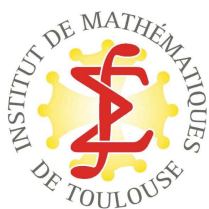
---

par Nathan Martin



Mertz Glacier Tongue, Image MERIS, ESA

Préparée de octobre 2009 à mars 2013 à l'Institut National des Sciences  
Appliquées de Toulouse





# Résumé

Un certain nombre d'écoulements géophysiques, tels que les écoulements de glace ou de lave magmatique, impliquent le mouvement gravitaire à faible nombre de Reynolds d'un fluide viscoplastique à surface libre sur un socle rocheux. Leur modélisation fait apparaître des lois de comportement rhéologique et des descriptions de leurs interactions avec le socle rocheux qui reposent sur des paramétrisations empiriques. Par ailleurs, l'observation systématique de ce type d'écoulements avec une grande précision est rarement possible ; les données associées à l'observation de ces écoulements, principalement des données de surface (télédétections), peuvent être peu denses, manquantes ou incertaines. Elles sont aussi le plus souvent indirectes : des paramètres inconnus comme le glissement basal ou la rhéologie sont difficilement mesurables *in situ*.

Ce travail de thèse s'attache à la modélisation directe et inverse de ces écoulements géophysiques, particulièrement les écoulements de glace, par des méthodes variationnelles à travers la résolution du problème de Stokes pour les fluides en loi de puissance.

La méthode de résolution du problème direct (Stokes non-linéaire) repose sur le principe du minimum de dissipation qui mène à un problème variationnel de type point-selle à quatre champs pour lequel on montre l'existence de solutions. La condition d'incompressibilité et la loi de comportement représentent alors des contraintes associées au problème de minimisation. La recherche des points critiques du lagrangien correspondant est réalisée à l'aide d'un algorithme de type lagrangien augmenté, discrétisé par éléments finis triangles à trois champs. Cet algorithme conduit à un important gain tant en temps de calcul qu'en utilisation mémoire par rapport aux algorithmes classiques.

On s'intéresse ensuite à la modélisation numérique inverse de ces fluides à l'aide du modèle adjoint et des deux principaux outils associés : l'analyse de sensibilité et l'assimilation de données. On étudie tout d'abord la modélisation rhéologique de ces fluides à travers les deux paramètres principaux de la loi de comportement : la consistance du fluide et l'exposant rhéologique. Des analyses de sensibilité sur ces paramètres définis localement, permettent de quantifier leurs poids relatifs au sein du modèle d'écoulement, en termes de vitesses de surface. L'identification de ces grandeurs est également réalisée. L'ensemble des résultats est résumé comme une

---

méthodologie vers une “rhéométrie virtuelle” pouvant représenter une aide solide à la mesure rhéologique.

Le glissement basal, paramètre majeur dans la dynamique de la glace, est investigué selon la même approche. Les analyses de sensibilité mettent en avant une capacité à voir à travers le caractère “filtré” et non-local de la transmission de la variabilité basale vers la surface, ouvrant des perspectives vers l’utilisation des sensibilités pour la définition de lieux d’intérêt pour l’observation et la mesure. Ce glissement basal, modélisation empirique d’un processus complexe et multiéchelle, est ensuite utilisé pour la comparaison avec une méthode inverse approximative courante en glaciologie (méthode négligeant la dépendance de la viscosité à la vitesse, *i.e.* la non-linéarité). Le modèle adjoint, obtenu par différentiation automatique et évalué par accumulation retour, permet de définir cette approximation comme un cas limite de la méthode inverse complète. Ce formalisme mène à une généralisation du processus d’évaluation numérique de l’état adjoint, ajustable en précision et en temps de calcul en fonction de la qualité des données et du niveau de détail souhaité dans la reconstruction.

L’ensemble de ces travaux est associé au développement du logiciel *DassFlow-Ice* de simulation directe et inverse de fluides viscoplastiques à surface libre. Ce logiciel prospectif bidimensionnel, diffusé dans la communauté glaciologique, a donné lieu au développement d’une version tridimensionnelle.

**Mots-clefs** : viscoplasticité, éléments finis, analyse de sensibilité variationnelle, assimilation de données, glaciologie, lagrangien augmenté, différentiation automatique

# Abstract

Several geophysical flows, such as ice flows or lava flows, are described by a gravity-driven low Reynolds number movement of a free surface viscoplastic fluid over a bedrock. Their modeling involves constitutive laws, typically describing their rheological behaviour or interactions with their bedrock, that lean on empirical parameterizations. Otherwise, the thorough observation of this type of flows is rarely possible; data associated to the observation of these flows, mainly remote-sensed surface data, can be sparse, missing or uncertain. They are also generally indirect : unknown parameters such as the basal slipperiness or the rheology are difficult to measure on the field.

This PhD work focuses on the direct and inverse modeling of these geophysical flows described by the power-law Stokes model, specifically dedicated to ice flows, using variational methods.

The solution of the direct problem (Stokes non-linear) is based on the principle of minimal dissipation that leads to a variational four-field saddle-point problem for which we ensure the existence of a solution. In this context, the incompressibility condition and the constitutive rheological law represent constraints associated to the minimization problem. The critical points of the corresponding Lagrangian are determined using an augmented Lagrangian type algorithm discretized using three-field finite elements. This algorithm provides an important time and memory saving compared to classical algorithms.

We then focus on the inverse numerical modeling of these fluids using the adjoint model through two main associated tools : sensitivity analysis and data assimilation. We first study the rheological modeling through the two principal input parameters (fluid consistency and rheological exponent). Sensitivity analyses with respect to these locally defined parameters allow to quantify their relative weights within the flow model, in terms of surface velocities. Identification of these parameters is also performed. The results are synthetized as a methodology towards “virtual rheometry” that could help and support rheological measurements.

The basal slipperiness, major parameter in ice dynamics, is investigated using the same approach. Sensitivity analyses demonstrate an ability to see beyond the “filtered” and non-local transmission of the basal variability to the surface. Consequently



---

these sensitivities can be used to help defining areas of interest for observation and measurement. This basal slipperiness, empirical modeling of a multiscale complex process, is then used to carry on a comparison with a so called “self-adjoint” method, common in glaciology (neglecting the dependency of the viscosity on the velocity, *i.e.* the non-linearity). The adjoint model, obtained by automatic differentiation and evaluated by reverse accumulation, leads to define this approximation as a limit case of the complete inverse method. This formalism allows to generalize the process of the numerical evaluation of the adjoint state into an incomplete adjoint method, adjustable in time and accuracy depending on the quality of the data and the level of detail required in the identification.

All this work is associated to the development of *DassFlow-Ice* software dedicated to the direct and inverse numerical simulation of free-surface viscoplastic fluids. This bidimensional prospective software, distributed within the glaciological community, serves as a model for the current development of the tridimensional version.

**Keywords** : viscoplasticity, finite elements, variational sensitivity analysis, data assimilation, glaciology, augmented Lagrangian, automatic differentiation

# Contexte scientifique

Ce travail de thèse s'est déroulé à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA). La thèse a été financée par une bourse ministérielle/PRES Toulouse obtenue dans le cadre d'un appel d'offre auquel l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT) et le Laboratoire d'Études en Géophysique et Océanographie Spatiales (LEGOS) ont répondu conjointement. Cette bourse été dotée de 3 ans de monitorat, entièrement réalisé à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA) auprès d'étudiants de 1<sup>re</sup> année (post-bac) et de 3<sup>e</sup> année (Batchlor). Des interactions avec le LEGOS et particulièrement avec B. Legrésy ont eu lieu sur les données du glacier Mertz. Par ailleurs, ce travail de thèse s'est déroulé dans le contexte du projet ANR ADAGe (<http://www-lgge.ujf-grenoble.fr/pdr/ADAGe/>) impliquant l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT), le Laboratoire d'Études en Géophysique et Océanographie Spatiales (LEGOS), le Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement (LGGE) et le Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK).

**Communications** Trois articles auprès de revue internationale à comité de lecture ont été soumis à ce jour (correspondant aux chapitres 4 et 5 du présent document ainsi qu'à une version traduite du chapitre 6). Un certain nombre de présentations orales ou poster dans un contexte de conférences internationales ont été réalisées au cours de cette thèse ainsi que des communications en français.

## **Publications soumises et actes de conférences :**

- Martin, N. and Monnier, J. (2012), *Four-field finite element solver for viscoplastic flows and variational sensitivity analysis*, SOUMIS AUPRÈS DE LA REVUE SIAM-JOURNAL ON SCIENTIFIC COMPUTING EN FÉVRIER 2013.
- Martin, N. and Monnier, J. (2012), *Four-field finite elements for viscoplastic free surface flows and variational data assimilation*, Proceeding of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012).

- 
- Martin, N. and Monnier, J. (2012), *Inverse Rheometry for Power-law Geophysical Flows Investigated Using Variational Sensitivities and Data Assimilation*, SOUMIS AUPRÈS DE LA REVUE AGU-JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH EN AVRIL 2013.
  - Martin, N. and Monnier, J. (2012), *Of the gradient accuracy in Full-Stokes ice flow model and the necessity of an exact adjoint : the example of basal slipperiness identification*, SOUMIS AUPRÈS DE LA REVUE EGU-THE CRYOSPHERE EN JUIN 2013.

#### Communications lors de conférences :

- *Sensitivity Analysis and Variational Data Assimilation for Ice Flows - Application to the Mertz ice-tongue*, **Poster**, 3-7 décembre 2012, American Geophysical Union - Fall Meeting (**AGU12**), San Francisco, Californie, USA.
- *Four-field finite elements for viscoplastic free surface flows and variational data assimilation*, **Présentation orale**, 12 septembre 2012, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (**ECCOMAS12**), Vienne, Autriche.
- *Sensitivity analysis using the variational data assimilation software DassFlow-Ice*, **Présentation orale**, 3-8 avril 2011, European Geosciences Union - General Assembly (**EGU11**), Vienne, Autriche.
- *Solveur éléments finis quatre champs et assimilation variationnelle de données pour des écoulements viscoplastiques à surface libre*, **Présentation orale**, 21-25/05/2012, SMAI, Congrès d'Analyse NUMérique 2012

#### Présentations orales dans le cadre d'ANR et de GDR :

- Exposés oraux des travaux dans le cadre des réunions annuelles du projet ANR ADAGe : Grenoble 2010 (*Développement d'un code de calcul pour le problème de Stokes en glaciologie et assimilation de données*), Montpellier 2011 (*Un nouveau logiciel d'assimilation variationnelle de données DassFlow-Ice*), Toulouse 2012 (*Algorithme de lagrangien augmenté et assimilation de données pour le problème de Stokes quasi-newtonien à surface libre*).
- *Assimilation variationnelle de données pour des écoulements viscoplastiques à surface libre*, Présentation orale au GDR CNRS "Films minces", 18/06/2012

# Remerciements

Je remercie en premier lieu MM. Stéphane Cordier, Richard Hindmarsh et Marco Picasso pour avoir accepté de rapporter sur mon travail de thèse ainsi que MM. Patrick Hild, Benoît Legrésy, Raphaël Loubère et Antoine Rousseau pour avoir accepté de m'examiner lors de ma soutenance.

Après trois ans et demi passés au sein du département de mathématiques de l'INSA de Toulouse en tant que doctorant précédés par cinq ans passés à l'INSA en tant qu'étudiant, un caractère affectif attaché au lieu et aux individus mérite d'être désigné dans ces pages de bilan. Toutes ces années à l'INSA m'ont permis d'acquérir mon bagage scientifique pour être finalement ingénieur et docteur en mathématiques appliquées. Elles ont également été le théâtre de ma vie post-bac à Toulouse et l'occasion de la rencontre de nombre de ceux qui sont aujourd'hui les miens. Je témoigne donc, non pas tant d'un remerciement que d'un chaleureux regard pour l'INSA de Toulouse.

Ces trois ans et demi de thèse ont été l'occasion de me retrouver de l'autre côté du bureau en réalisant trois charges d'enseignements, à l'INSA même, qui m'ont permis d'affirmer mon plaisir dans l'exercice du métier d'enseignant. Je remercie donc chaleureusement Géraldine Quinio, Sandrine Scott, Adeline Rouchon, Alain Huard, Pierre Weiss, Hélène Milhem, Violaine Roussier-Michon, Cathy Maugis-Rabusseau, Olivier Mazet et tous les autres pour avoir rendu ces premières années d'enseignant tout à fait agréables. La plupart d'entre eux m'ayant également eu comme élève, ils en sont deux fois remerciés. À ce titre, je remercie également l'ensemble de mes étudiants pour avoir été agréables et compétents, sans excès de zèle, permettant de m'assurer d'une certaine utilité dans mon rôle d'enseignant.

Dans le cadre de mon travail de recherche, je remercie tous ceux avec qui j'ai pu collaborer scientifiquement et notamment Ronan Madec du GMM pour son travail de développement très solide et rigoureux et la collaboration scientifique qui en a découlé, Olivier Gagliardini, Gaël Durand et Fabien Gillet-Chaulet du LGGE pour les nombreuses interactions hautement amicales dans le cadre du projet ANR, Benoît Legrésy du LEGOS pour les différents échanges scientifiques, les contributions graphiques pour le manuscrit et le travail de relecture amont. Je remercie également

---

les étudiants du GMM dont j'ai pu encadrer les projets et qui ont donc travaillé sur mon code dans la lignée des problématiques abordées dans cette thèse et notamment les projets de Florian Faucher, Mélanie Rochoux et Guillaume Taburet et d'Étienne Corman et Xavier Morel qui ont représenté des contributions significatives au présent travail.

Je remercie mes collègues de bureau successifs Mai, Florian, Sophie et Ronan ainsi que mes collègues de midi Swen et Yves pour leur grandes qualités humaines.

Je tiens également à remercier les miens, non pas pour leurs contributions significatives à ce travail mais pour avoir très largement contribué à faire de moi ce que suis : Robin (également remercié en tant que collaborateur d'enseignement et collègue de bureau), Pfff, Thibault, Lili, Pouletch, Ju, Vinçou, Pépé, Allison, Willow, Dub, Odré, Chris, Patooze, Yannick, Virginie, Ramou, Chopin, Pauline, Chemeu, Herminie, ... la liste ne saurait être exhaustive.

Je remercie de la même manière mes parents, mon frère et ma soeur qui ont également su être un soutien moral et logistique important, ma grand-mère pour sa grande fierté envers mon parcours et salue mon premier neveu, Émile, fraîchement arrivé parmi les siens.

Ma douce et tendre, Mélody, est plus que chaleureusement remerciée pour m'avoir toléré si longuement et pour sembler prête à le faire encore, pour m'avoir écouté et soutenu, jour après jour, moralement et scientifiquement.

Pour finir et, en un sens, commencer, je tiens à remercier d'une attention toute particulière mon directeur de thèse Jérôme Monnier. Après m'avoir rencontré pour la première fois en tant qu'étudiant insatisfait des règles définissant le choix des stages dans le bureau d'un collègue et m'avoir pris en stage de fin d'étude en remplacement de l'autre stage, il a, peut-être contre certaines attentes, souhaité me recruter en thèse. Bien qu'incertain de mes choix et de mon devenir scientifique, j'ai accepté. Après plus de quatre années à nous côtoyer intensivement, je peux retrospectivement juger, également à l'aune de ce que j'ai pu observer autour de moi, l'encadrement rare et précieux que m'a prodigué Jérôme. Il a été tour à tour un professeur, un mentor, un collègue, un collaborateur et, sans nul doute aujourd'hui, un ami. Il ne m'a jamais lâché scientifiquement tout en me forçant à me consolider et à opérer individuellement, il a toujours répondu à mes questions dans les plus brefs délais, sans jamais me mâcher le travail. Un grand nombre de ses démarches et méthodes envers moi m'ont été hautement profitable aujourd'hui et, tout scientifique que j'ai pu devenir, je le lui dois au moins autant qu'à moi-même.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Contexte scientifique</b>	<b>v</b>
<b>Remerciements</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>5</b>
1.1 HISTORIQUE ET GÉNÉRALITÉS SUR LA MODÉLISATION DE L'ÉCOULEMENT DES GLACES TERRESTRES . . . . .	5
1.2 PROBLÉMATIQUE D'ÉCHELLE . . . . .	13
1.3 L'ÉLEVATION DU NIVEAU DES MERS . . . . .	14
1.4 SYNTHÈSE DES PROBLÉMATIQUES ET ANNONCE DU PLAN . . . . .	15
<b>2 Modélisation directe des écoulements de glace</b>	<b>19</b>
2.1 LA GLACE : HISTOIRE D'UN FLUIDE RAMPANT . . . . .	19
2.2 RAPPELS DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS . . . . .	21
2.2.1 <i>Déformations</i> . . . . .	21
2.2.2 <i>Contraintes : la méthode de Cauchy</i> . . . . .	22
2.2.3 <i>Fluide visqueux</i> . . . . .	24
2.3 LOIS DE CONSERVATION . . . . .	24
2.4 LOI DE PUISSANCE, LOI DE GLEN ET MODÉLISATION THERMIQUE . . . . .	26
2.4.1 <i>Loi de comportement</i> . . . . .	26
2.4.2 <i>Modélisation thermique</i> . . . . .	30
2.5 MODÉLISATION DU SOCLE : REVUE DES LOIS DE GLISSEMENT . . . . .	31
2.5.1 <i>Glissement sur un socle rigide : la théorie de Weertman</i> . . . . .	32
2.5.2 <i>Glissement sur un socle déformable</i> . . . . .	36
2.5.3 <i>Bilan</i> . . . . .	37
2.6 MODÈLE D'ÉCOULEMENT DE FLUIDE GÉOPHYSIQUE QUASI-NEWTONIEN À SURFACE LIBRE . . . . .	38

2.6.1	<i>Le modèle d'écoulement</i>	38
2.6.2	<i>Formulation du problème instationnaire</i>	40
<b>3</b>	<b>Problème inverse - Approche variationnelle</b>	<b>45</b>
3.1	LA MÉTHODE DE L'ÉTAT ADJOINT	46
3.1.1	<i>Position du problème</i>	46
3.1.2	<i>Fonction coût</i>	47
3.1.3	<i>Modèle linéaire tangent</i>	47
3.1.4	<i>Modèle adjoint</i>	48
3.1.5	<i>Analyse de sensibilité locale</i>	49
3.2	L'ASSIMILATION VARIATIONNELLE DE DONNÉES	50
3.2.1	<i>Problème de contrôle</i>	51
3.2.2	<i>Système d'optimalité</i>	51
3.2.3	<i>Méthodes locales et régularisation</i>	52
3.3	IMPLÉMENTATION DU MODÈLE ADJOINT	56
3.3.1	<i>Les différentes stratégies</i>	56
3.3.2	<i>Différentiation automatique</i>	56
3.3.2.1	Principes	57
3.3.2.2	Validation du code adjoint	59
3.3.3	<i>Résumé de l'algorithme</i>	60
3.4	UTILISATION ET RÔLE DES MÉTHODES INVERSES EN GLACIOLOGIE	61
3.4.1	<i>Les données en glaciologie</i>	61
3.4.2	<i>Des données au modèle et du modèle aux données</i>	66
3.5	LE LOGICIEL DASSFLOW-ICE	68
3.5.1	<i>Structure du code de calcul</i>	68
3.5.2	<i>Une première étude : le glacier Variegated</i>	69
<b>4</b>	<b>Solveur éléments finis quatre champs pour des écoulements quasi-newtonien</b>	<b>75</b>
4.1	RÉSUMÉ EN FRANÇAIS	76
4.2	INTRODUCTION	78
4.3	THE FLUID MODEL	81
4.4	BASIC NUMERICAL PROCEDURES	83
4.4.1	<i>Mixed Weak Formulation</i>	83
4.4.2	<i>Classical Solvers and Limitations</i>	86
4.5	FOUR-FIELD SADDLE POINT PROBLEM	88
4.5.1	<i>Four-Field Saddle-Point Formulation</i>	88
4.5.2	<i>Existence and Uniqueness of the Saddle-Point</i>	90
4.5.3	<i>Characterization of the saddle-point</i>	93
4.5.4	<i>LA and LA<math>\theta</math> algorithms</i>	96
4.5.5	<i>Finite element discretization</i>	98
4.6	PERFORMANCES OF <b>LA</b> AND <b>LA<math>\theta</math></b> ALGORITHMS	100

4.6.1	<i>Convergence curves</i>	100
4.6.2	<i>Comparative performances</i>	103
4.6.3	<i>Summary</i>	106
4.7	LOCAL SENSITIVITY ANALYSIS	107
4.7.1	<i>Observations and cost function</i>	108
4.7.2	<i>Adjoint model</i>	108
4.8	NUMERICAL EXPERIMENTS	109
4.8.1	<i>Analytical Poiseuille-like solution</i>	109
4.8.2	<i>The viscoplastic steady wave</i>	110
4.8.2.1	Description	110
4.8.2.2	Numerical results	111
4.8.3	<i>Geophysical test case : the Mertz glacier</i>	112
4.8.3.1	Description	112
4.8.3.2	Numerical results	114
4.9	CONCLUDING REMARKS	115
<b>5</b>	<b>Analyse de sensibilité variationnelle et rhéométrie inverse</b>	<b>117</b>
5.1	RÉSUMÉ EN FRANÇAIS	118
5.2	INTRODUCTION	121
5.3	CONTINUOUS AND DISCRETE FORWARD MODEL	124
5.4	NUMERICAL INVERSE TOOLS	124
5.4.1	<i>Basic Principles of a Variational Data Assimilation Process</i>	125
5.4.2	<i>Cost Function in Presence of Observations</i>	126
5.4.3	<i>Adjoint Model and Gradient Computation</i>	126
5.4.3.1	Local Sensitivity Analysis	127
5.4.3.2	Data Assimilation and Twin Experiments	127
5.5	ANALYTICAL SOLUTION AND RELATED SENSITIVITIES	128
5.6	ARE SURFACE VELOCITY OBSERVATIONS RELIABLE ?	130
5.7	VIRTUAL RHEOMETRY : POWER-LAW EXPONENT	133
5.7.1	<i>Flow Description</i>	133
5.7.2	<i>Numerical Results</i>	134
5.8	VIRTUAL RHEOMETRY : CONSISTENCY $\eta_0$ (TEMPERATURE DEPENDENCY)	135
5.8.1	<i>Description of the Thermal Dependent Flow</i>	136
5.8.2	<i>Sensitivity With Respect to <math>\eta_0</math></i>	137
5.8.2.1	No-Slip Case	137
5.8.2.2	Sliding Case	138
5.8.2.3	Discussion	140
5.8.3	<i>Identification of <math>\eta_0</math> Based on Surface Velocity Observations</i>	140
5.8.3.1	Naive Approach	141
5.8.3.2	Approach Based on Prior Physical Considerations	144
5.9	CONCLUSION	146



<b>6</b>	<b>Sur la précision du gradient et la nécessité d'un adjoint exact</b>	<b>149</b>
6.1	INTRODUCTION . . . . .	149
6.2	ADJOINT EXACT, MÉTHODE DE L'ACCUMULATION RETOUR ET APPROXIMATION "AUTO-ADJOINTE" . . . . .	151
6.2.1	<i>Précision de l'approximation "auto-adjointe"</i> . . . . .	152
6.2.2	<i>Troncature de l'accumulation retour</i> . . . . .	154
6.3	IDENTIFIABILITÉ DU COEFFICIENT DE FRICTION . . . . .	156
6.3.1	<i>Écoulement quasi-uniforme</i> . . . . .	157
6.3.2	<i>Écoulement sur topographie réelle du glacier Mertz</i> . . . . .	165
6.4	DENSITÉ DES DONNÉES . . . . .	170
6.5	CONCLUSION . . . . .	171
<b>7</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>175</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>183</b>
<b>A</b>	<b>Adjoint of a linear solver</b>	<b>199</b>
A.1	THE DIRECT ROUTINE . . . . .	199
A.2	THE LINEAR TANGENT ROUTINE . . . . .	200
A.3	THE ADJOINT ROUTINES GENERATED . . . . .	201
A.4	THE ADJOINT OF THE LINEAR SYSTEM . . . . .	201
<b>B</b>	<b>Rapport d'analyse numérique pour le logiciel DassFlow-3D</b>	<b>205</b>
B.1	WEAK FORMULATION . . . . .	205
B.2	FINITE ELEMENT FORMULATION . . . . .	207
B.2.1	<i>Galerkin approximation</i> . . . . .	208
B.2.2	<i>The Taylor-Hood (Lagrangian <math>\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1</math>) finite element</i> . . . . .	210
B.2.3	<i>The friction condition</i> . . . . .	211
B.3	VALIDATION . . . . .	212
B.3.1	<i>Validation of the bidimensional code</i> . . . . .	213
B.3.1.1	<i>Analytical test-case</i> . . . . .	213
B.3.1.2	<i>ISMIP test-cases</i> . . . . .	214
B.3.2	<i>Explicit solution in 3D</i> . . . . .	217
B.3.3	<i>Validation of the friction condition</i> . . . . .	218

# Table des figures

1.1	Schéma d'un glacier de montagne . . . . .	6
1.2	Schéma du processus de vêlage d'icebergs . . . . .	8
1.3	Vue 3D d'un DEM du glacier Mertz . . . . .	9
1.4	Photo satellite du glacier Mertz, ligne d'écoulement et ligne d'échouage .	10
1.5	Vitesses de surface mesurées de l'Antarctique et du Groenland . . . . .	12
2.1	Tenseur des contraintes de Cauchy . . . . .	23
2.2	Représentation contraintes-déformations des différents fluides viscoplas-	
	tiques . . . . .	29
2.3	Schéma des différents processus impliqué dans l'hydrologie sous-glaciaire	33
2.4	Vitesse de glissement en fonction des contraintes basales . . . . .	35
2.5	Géométrie schématique d'un écoulement gravitaire géophysique bidimen-	
	sionnel . . . . .	39
3.1	Principe de discrétisation de Morozov . . . . .	55
3.2	Stratégies d'obtention d'un code adjoint . . . . .	57
3.3	Test du gradient modèle . . . . .	61
3.4	Topographie de la calotte Antarctique . . . . .	63
3.5	Carte d'épaisseur de glace de la calotte Antarctique (données BEDMAP2)	65
3.6	Vue schématique des modes d'observations de la glace de surface et l'état	
	du socle . . . . .	66
3.7	Structure générale du logiciel <i>DassFlow-Ice</i> . . . . .	69
3.8	Sensibilités à la friction sur le glacier Variegated . . . . .	71
3.9	Sensibilités à la consistance du fluide sur le glacier Variegated . . . . .	71
3.10	Coût et gradient au cours de la minimisation . . . . .	72
3.11	Vitesses de surfaces calculées et observées sur le glacier Variegated . . . .	72
3.12	Coefficient de frictions identifié sur le glacier Variegated . . . . .	73
4.1	Géométrie schématique d'un écoulement gravitaire géophysique bidimen-	
	sionnel . . . . .	82
4.2	Éléments finis de Taylor-Hood étendu à 3 champs . . . . .	100
4.3	Courbes de convergences pour l'algorithme <b>LA</b> . . . . .	103
4.4	Vitesse calculé et vitesse d'entrée pour la vague de Kaolin . . . . .	111

4.5	Sensibilité à l'exposant rhéologique spatialement distribué pour la vague de Kaolin . . . . .	111
4.6	Coupe vertical du glacier Mertz . . . . .	113
4.7	Vitesses de surfaces et sensibilités à la friction en présence et en l'absence d'une zone de glissement parfait . . . . .	114
5.1	Principe de l'algorithme 3D-Var . . . . .	126
5.2	Sensibilité à l'exposant rhéologique spatialement distribué pour un écoulement uniforme sur maillage grossier . . . . .	131
5.3	Sensibilité à l'exposant rhéologique spatialement distribué pour un écoulement uniforme sur maillage fin . . . . .	132
5.4	Coût et gradient au cours de l'identification de l'exposant rhéologique sur l'écoulement de lave . . . . .	134
5.5	Sensibilité à la consistance sur le glacier Mertz avec condition d'adhérence	138
5.6	Sensibilité à la consistance sur le glacier Mertz pour un glissement basal modéré . . . . .	139
5.7	Profils de vitesses pour différentes valeurs du gradient de température basale . . . . .	139
5.8	Champ de consistance $\eta_0$ cible pour l'identification . . . . .	141
5.9	Courbe de Morozov pour l'identification de la consistance $\eta_0$ . . . . .	142
5.10	Reconstruction de la consistance $\eta_0$ pour différents niveaux de régularisation	142
5.11	Reconstruction de la consistance dans le cas d'une régularisation anisotrope	145
5.12	Vitesses de surfaces calculées et observées après identification de la consistance . . . . .	146
6.1	Test du gradient comparé pour la méthode de l'adjoint exact et l'approximation "autoadjointe" . . . . .	153
6.2	Précision du gradient pour une accumulation retour incomplète . . . . .	155
6.3	Coefficient de friction $\beta$ . . . . .	158
6.4	Courbes de Morozov dans le cas d'un glissement modéré . . . . .	159
6.5	Transformée de Fourier discrètes des coefficients de friction identifiés et du coefficient cible pour une friction forte . . . . .	161
6.6	Transformée de Fourier discrètes des coefficients de friction identifiés et du coefficient cible pour une friction faible . . . . .	162
6.7	Courbes de Morozov pour l'écoulement non uniforme pour différents facteurs de glissement . . . . .	166
6.8	Transformée de Fourier discrètes des coefficients de friction identifiés et du coefficient cible pour l'écoulement non uniforme . . . . .	167
6.9	Sensibilité relative au coefficient de friction pour différents facteurs de glissement . . . . .	169
6.10	Transformée de Fourier discrètes des coefficients de friction identifiés et du coefficient cible pour l'écoulement non uniforme avec données peu denses	172

7.1	Sensibilité 3D au coefficient de friction . . . . .	178
7.2	Sensibilité 3D à la consistance $\eta_0$ . . . . .	179
7.3	Norme du champ de vitesse stationnaire calculée sur le profil vertical du glacier Mertz incluant la partie flottante . . . . .	181
7.4	Lignes de niveau de la vitesse vertical calculée à la ligne d'échouage pour différentes valeurs de l'exposant rhéologique . . . . .	182
A.1	Direct routine scheme . . . . .	199
A.2	Linear tangent routine scheme . . . . .	200
A.3	Adjoint routine representation . . . . .	203
B.1	Reference tetrahedron for Taylor-Hood elements . . . . .	211
B.2	Analytical solution . . . . .	213
B.3	Relative errors with respect to mesh step using $P_2-P_1$ Taylor-Hood finite element - Comparison between <i>DassFlow-Ice</i> and <i>Elmer-Ice</i> . . . . .	214
B.4	Horizontal velocity at surface from ISMIP Experiment B computed using <i>DassFlow-Ice</i> . . . . .	216
B.5	Horizontal surface velocities from ISMIP Experiment D computed using <i>DassFlow-Ice</i> . . . . .	217
B.6	Shape and velocity of the free-surface at steady state ( $T = 1000$ years) . . . . .	217
B.7	Solution for the Sinusoidal test case in 3D with $p=2$ and $q=2$ (pressure part). . . . .	218
B.8	Solution for the Sinusoidal test case in 3D with $p=2$ and $q=2$ (velocity part). . . . .	218
B.9	Convergence curves for the Sinusoidal test case for <i>DassFlow-3D</i> with $p=2$ and $q=2$ . . . . .	219
B.10	Surface and basal horizontal velocity for a bidimensional channel and the tridimensional square cross-sectionned counterpart . . . . .	220
B.11	Surface and basal vertical velocity for a bidimensional channel and the tridimensional square cross-sectionned counterpart . . . . .	220



# Introduction générale

Un objectif majeur d'une étude environnementale est la *prédiction* de l'évolution *naturelle* du système géophysique. On peut considérer que cette vision s'inscrit dans la tradition de la connaissance objective et du *déterminisme physique*. Cette vision s'est principalement imposée et généralisée avec l'apparition de la mécanique newtonienne. Dans l'introduction de sa théorie analytique des probabilités, Pierre-Simon de Laplace définit très clairement cette vision : "Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome ; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux." <sup>1</sup>

Jadis, la *plausibilité intuitive* dans la méthodologie scientifique a joué un rôle important de "guide" sur le chemin de la "vérité". Dans son *Discours de la méthode* (1637), René Descartes la place comme premier élément d'une méthode scientifique, dont la *déduction logique* est le deuxième outil permettant l'enchaînement des intuitions et menant finalement à un *raisonnement*. Bien qu'adressé aux poètes, cet alexandrin de Nicolas Boileau, assez contemporain du *Discours de la Méthode*, résume très justement la vision intuitive : "Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement, et les mots pour le dire arrivent aisément". <sup>2</sup>

Cet outil a plus ou moins cessé d'exister, remplacé principalement par *l'observation*. La science physique moderne, telle qu'on la pratique le plus souvent, met à l'épreuve la validité d'une méthode par l'évaluation systématique de l'erreur et de la précision à travers une comparaison à l'expérience.

La modélisation des écoulements géophysiques a connu un essor vertigineux durant les dernières décennies principalement du fait de l'amélioration des capacités

---

1. Pierre-Simon de Laplace. "Théorie analytique des probabilités ; par M. le comte de Laplace". *Mme. Ve. De Courcier, Paris*, 1814.

2. Nicolas Boileau. "L'art poétique, Chant I", 1674.

de calcul et du formidable accroissement de la densité spatiale et temporelle des observations de la Terre, aussi bien *in situ* que télédéteectées.

Cependant, les écoulements géophysiques ont des caractéristiques propres qui soulèvent des questionnements sur la possibilité de les modéliser et de prédire leur état futur. On retiendra d'abord leur caractère *unique* : une situation d'écoulement donnée n'a jamais existé auparavant et ne se reproduira pas dans le futur. Vient ensuite leur forte *non-linéarité* : la réalisation d'un écoulement géophysique est la conséquence de multiples processus et de leurs interactions mettant en jeu des phénomènes physiques très variés dont le couplage en cascade a lieu à toutes les échelles de temps et d'espace.

On peut reprendre à ce sujet l'image de Karl Popper proposant de placer tout système physique sur une droite dont une des extrémités serait un nuage, incarnation du phénomène physique très irrégulier, désordonné et difficilement prédictible, et l'autre extrémité serait une horloge, fiable, ordonnée, systématique<sup>3</sup>. L'objet de cette image est principalement de questionner le principe de déterminisme physique qui stipule simplement que *tous les nuages sont des horloges*. À l'inverse, une vision probabiliste consiste à penser que tout système physique, aussi apparents soient son déterminisme et sa régularité, est soumis, à une certaine échelle, à des phénomènes aléatoires.

Cette question, tout à fait philosophique, trouve un écho très à propos dans la réflexion de Charles Sanders Peirce : "l'esprit non scientifique tient en très haute estime la précision du travail de laboratoire et serait bien surpris d'apprendre que la plupart n'excède pas la précision d'un tapissier mesurant une fenêtre pour une paire de rideaux."<sup>4</sup>

Une lecture de cette remarque est qu'elle revient simplement à nier la question du déterminisme en soulignant que, quelle que soit la réalité philosophique du comportement de la nature (déterministe et/ou probabiliste), la véritable limitation se trouve dans la capacité humaine à *observer* et à mesurer. Finalement, que l'on croie ou non à un déterminisme total ou bien à la participation intrinsèque de phénomènes aléatoires aux écoulements géophysiques, la grande complexité du couplage multiphysique et multiéchelle (généralement à partir de théories et de modèles incompatibles) jumelée à la réalisation de mesures nécessairement entâchée d'erreurs sur lesquelles il est nécessaire de s'appuyer, semble nous dire que, en l'état actuel des choses, la modélisation de ces écoulements s'apparente bien plus au nuage qu'à l'horloge.

La distinction classique entre *théorie et observations* n'est pas toujours évidente à opérer. À une extrémité, on peut prendre l'exemple de la paléontologie qui développe

---

3. Karl Popper. "Objective Knowledge". *Oxford Press University*, 1979.

4. Robert P. Crease. "Charles Sanders Peirce and the first absolute measurement standard". *Physics Today, American Institute of Physics*, 2009

---

des théories complexes à partir d'observations rares et disperses. À l'autre extrémité, la construction d'un satellite, objet de mesures de haute précision et à grande échelle, a nécessité l'élaboration de nombreuses théories pour pouvoir être réalisé. La notion de méthode inverse va dans le sens d'un floutage de cette frontière généralement considérée entre théorie et observations. En fait, cette distinction non triviale ne joue probablement pas un rôle fondamental dans la méthodologie scientifique : le concept de méthode inverse, dont l'usage est de plus en plus généralisé dans de nombreux domaines applicatifs, sert l'objectif de faire avancer côte à côte théorie et observations en appuyant de manière systématique les observations réalisées sur des considérations théoriques et le développement et le raffinement d'une théorie au vu des observations disponibles. Autrement dit, le principe général d'une *modélisation inverse* d'un système semble représenter une forme de réponse, ou tout au moins de prise en compte humble des capacités modélisantes de la science actuelle : des données infiniment précises sont sans objet pour l'utilisation au sein d'un modèle partiel et approximé et la conception d'un modèle fortement couplé présentant une lourde paramétrisation est sans objet en l'absence de données suffisamment précises.

Il est intéressant de remarquer que la modélisation inverse d'un système repose sur deux grandes approches mathématiques principales que sont les méthodes variationnelles ou déterministes et les méthodes stochastiques ou probabilistes. On montre d'ailleurs que, dans un cas linéaire quadratique, l'approche statistique et l'approche variationnelle sont équivalentes. Il suit que les procédés les plus élaborés et les plus fins utilisés dans la modélisation inverse de systèmes complexes combinent généralement ces deux approches. Les principaux outils issus de ces méthodes sont l'étude de sensibilité et l'identification de paramètres.

La définition d'une paramétrisation d'un modèle consiste, pour le physicien, à déterminer les quantités qui lui semblent importantes pour décrire le processus et à déduire des lois mathématiques traduisant leur rôle au sein du système. A ce titre, l'intuition continue à jouer un rôle dans la modélisation physique et celui qui voudra, par exemple, modéliser la dynamique des calottes polaires considérera probablement assez naturellement (et possiblement à tort) que le rôle de la flore microbienne se développant dans les glaces polaires est de moindre importance que celui des précipitations et de la température.

Le premier outil d'une approche inverse qu'est l'étude de la sensibilité d'un modèle à sa paramétrisation semble primordiale en cela qu'elle questionne le bien fondé de ladite paramétrisation, qu'elle quantifie le rôle individuel d'un paramètre dans un modèle et son rôle par rapport aux autres paramètres.

En ayant conscience des partis pris et limitations d'un modèle mathématique paramétré, plutôt que d'essayer de répondre à la question d'une détermination objective de la réalité physique, l'analyse de sensibilité permet donc d'évaluer, à posteriori, la pertinence des choix opérés pour la définition du jeu de paramètres impliqué.



L'analyse monovariante permettra généralement d'observer spatialement le rôle d'un paramètre et donc de comprendre les zones clés d'action pour ce paramètre. L'analyse comparative permet de souligner le rôle crucial de certains des paramètres, qu'il faudra donc connaître avec une grande précision pour que le modèle rende mieux compte de la réalité observée, et de mettre en évidence le rôle mineur d'autres paramètres, dont la modélisation directe peut probablement se satisfaire d'une connaissance approximative (ou plus simplement s'en passer).

La deuxième étape, suivie dans cette étude, qu'est l'assimilation de données a pour objectif la calibration de modèles ou identification de paramètres. La terminologie de calibration semble plus justement désigner la réalité sous-jacente du procédé : on souhaite que notre modèle *rende compte* de la réalité et non qu'il réalise la détermination de "l'état vrai" du système physique. Un très bon exemple est celui du glissement basal des glaciers : le phénomène de glissement est un phénomène crucial pour l'écoulement des glaciers, extrêmement complexe, multiphysique et multiéchelle que l'on intègre au sein d'un modèle de plus grande dimension lui-même multiphysique et multiéchelle, à travers une loi empirique dont l'intensité est le plus souvent quantifiée par une simple grandeur scalaire. La connaissance de cette grandeur scalaire ne rend donc aucunement compte du processus de glissement mais quantifie son poids au sein du modèle. De la même manière, ce paramètre scalaire constitue donc un modèle en soi.

Paul Feyerabend offre une vision jusqu'au-boutiste de cette situation en énonçant que "théories et observations peuvent être abandonnées toutes les deux à la fois : les théories en raison d'observations conflictuelles, les observations pour des raisons théoriques"<sup>5</sup>. Dans une perspective moins philosophique et plus modeste, on peut probablement résumer la présente démarche de modélisation inverse comme la volonté *de mieux comprendre les écoulements à travers leurs modèles et le contenu des modèles à travers l'observation des écoulements*.

---

5. Paul Feyerabend. "Against Method". *New Left Books, London*, 1975.

# 1 Introduction

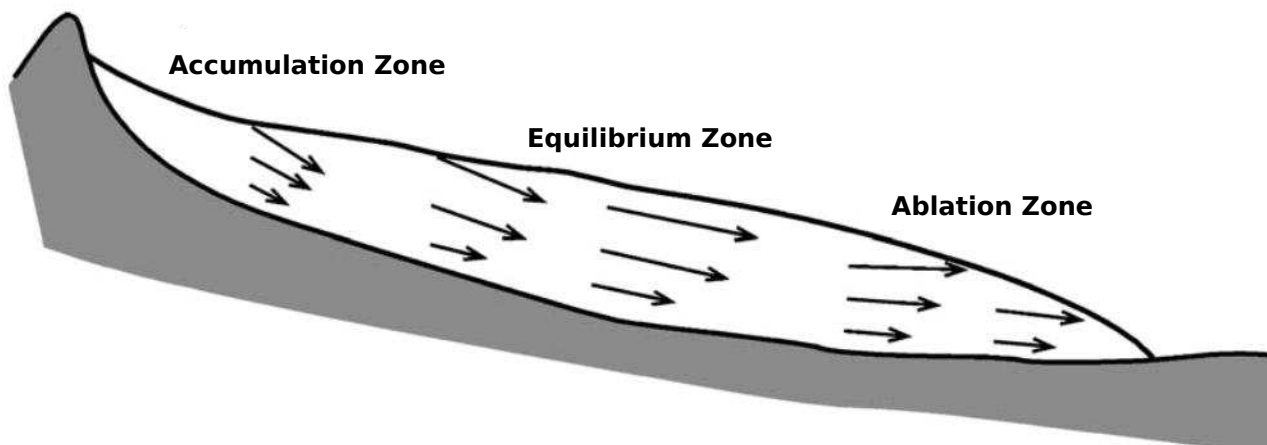
On désigne par *cryosphère* l'ensemble des composantes gelées du système climatique. La cryosphère représente à elle-seule environ 80% de l'ensemble des réserves d'eau douce. Elle est composée de nombreux sous-systèmes dont les principaux sont la neige, les glaciers de montagnes et calottes glaciaires, les glaces de mer ou banquise, le pergélisol (ou *permafrost*) et les calottes polaires (ou *inlandsis*) (voir *e.g.* [87]). La neige représente un apport de masse sous forme de précipitation de glace cristalline au sein de la cryosphère. La banquise est une formation de glace flottante issue du gel de l'eau de mer. Le pergélisol désigne un sol dont la température demeure inférieure à son point de congélation.

Les glaciers de montagne, les calottes glaciaires et les inlandsis représentent l'ensemble des glaces *terrestres* sujettes à un écoulement *gravitaire*. Les glaciers sont de faibles masses de glace soumises à des contraintes topographiques importantes (typiquement une vallée de montagne), les calottes glaciaires et les calottes polaires désignent des masses de glace continentale étendues. Une limite arbitraire sur la superficie fixée à 50000 km<sup>2</sup> sépare les deux terminologies. En l'état, les calottes polaires de la planète sont au nombre de deux : l'Antarctique et le Groenland.

Le mouvement gravitaire de la glace provient de deux principaux phénomènes que sont la déformation plastique et le glissement basal (un troisième étant la déformation du socle rocheux lui-même, voir *e.g.* [36]). La déformation plastique de la glace a lieu par fluage : elle se déforme lentement et continûment de manière irréversible sous l'effet d'une contrainte. Le glissement de la glace sur son socle est un phénomène complexe, à priori couplé à la déformation du socle rocheux à travers la présence d'un substrat sous-glaciaire. Le processus général qui sera considéré ici est issu de la théorie de Weertman [172] du glissement sur un socle rigide. On ne traitera dans la suite que de ce type d'écoulements.

## 1.1 Historique et généralités sur la modélisation de l'écoulement des glaces terrestres

Le processus de formation des glaces terrestres, du glacier alpin à la calotte polaire, est relativement similaire. Les précipitations de neige s'accumulent du fait



**Figure 1.1:** Illustration schématique des différentes zones d'un glacier de montagne et du champ de vitesse. Image adaptée de [36]

d'une fonte insuffisante (voire inexistante) due à de basses températures. Sous l'effet de son propre poids et de celui d'éventuelles couches supérieures, la neige perd ou comprime les bulles d'air qu'elle contient. Il s'ensuit une densification de la couche de neige et sa transformation en glace. Sous les effets conjugués de la déformation et d'un éventuel glissement basal, la glace se met en mouvement.

On distingue schématiquement trois zones dans un glacier de montagne (voir Figure 1.1). La zone de haute altitude (la plus froide), appelée zone d'accumulation, est le lieu de formation de la glace par accumulation des précipitations. Dans cette zone, la température est telle que la quantité de neige accumulée est supérieure à la quantité de neige sublimée ou fondue. La zone d'ablation correspond à la zone de basse altitude, plus chaude, où a lieu une perte de masse : l'apport des précipitations est inférieure à la fonte. Une zone intermédiaire de transport présente une ablation limitée qui contient la ligne d'équilibre du glacier qui sépare la partie à bilan de masse positif (zone d'accumulation) de la partie à bilan de masse négatif (zone d'ablation).

L'écoulement gravitaire du glacier a pour effet de transporter la masse de la zone d'accumulation vers la zone d'ablation sous l'effet de la pression, contribuant à maintenir un certain état d'équilibre.

Le processus, bien que similaire, présente certaines différences dans le cas des calottes polaires. Le principal apport de masse demeure celui provenant des précipitations, bien que le regel de l'océan puisse amener une augmentation de masse dans certaines zones des parties flottantes. L'ablation estivale de surface est une composante négligeable de la perte de masse en Antarctique et significative au Groenland (voir [164]). En revanche cette perte de masse a lieu par d'autres processus que celui de l'ablation estivale. La composante supplémentaire essentielle dans le bilan de masse a lieu au niveau des glaces flottantes, transportées au-delà de la ligne de côte. L'érosion sous-glaciaire, due à un océan plus chaud, observée sporadiquement,

représente 30 à 60% de la perte de masse des langues et plateformes flottantes. Vient ensuite le *vêlage* d'icebergs par les glaciers émissaires ou fleuves de glaces, correspondant à la séparation de la glace flottante du continent.

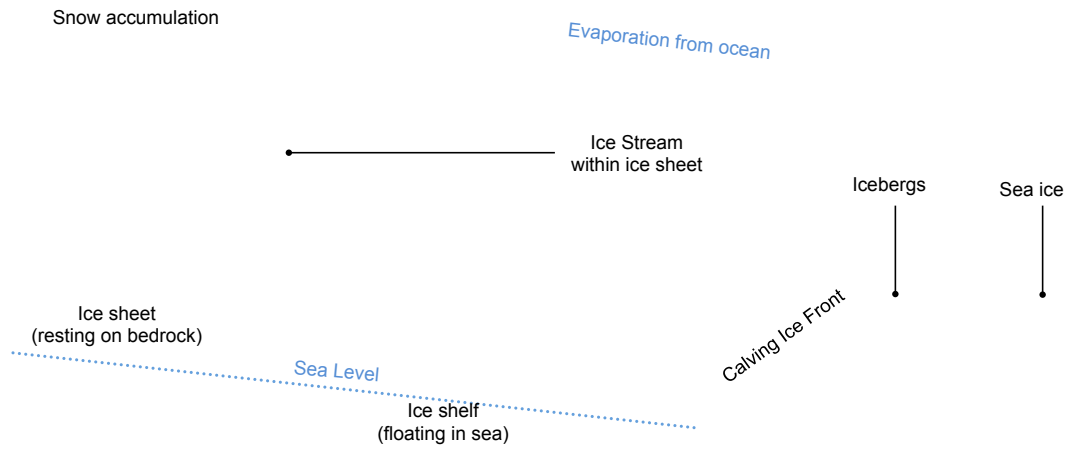
Un fleuve de glace est une partie d'une calotte polaire pour laquelle l'écoulement de la glace est plus rapide que la glace environnante et non nécessairement dans la même direction. L'existence de ces glaciers rapides est connue depuis longtemps (voir *e.g.* [163]).

Le processus de vêlage (voir Figure 1.2) peut se résumer comme suit. Les glaciers émissaires et fleuves de glace s'écoulent rapidement en direction de la côte, se rejoignent éventuellement, pour converger vers une baie ou plus généralement une échancrure côtière pour finir par déborder au-delà de la côte. La glace va alors se mettre à flotter. La partie du glacier reposant sur l'eau est appelée langue de glace ou plateforme de glace (selon la configuration) ou plus simplement glace flottante. La zone de transition entre glace posée et glace flottante est appelée zone d'échouage et la limite théorique séparant la glace reposant sur le socle rocheux de la glace flottante est appelée *ligne d'échouage*. En termes d'écoulement, cette ligne représente un changement de condition limite se traduisant, entre autres, par une réduction importante du frottement basal. La glace reposant sur le continent et la glace flottante font parties intégrantes d'un même écoulement et donc de la masse totale de glace considérée.

La perte de masse a lieu lorsque les langues de glace finissent par se séparer du continent sous la forme d'icebergs. Ce processus de vêlage d'icebergs représente une composante majeure du bilan de masse des calottes polaires. Cette décharge de masse des calottes dans l'océan est majoritairement contrôlée par un nombre relativement réduit de glaciers côtiers émissaires. On en dénombre une trentaine au Groenland et une cinquantaine en Antarctique (voir Figure 1.5).

Les plateformes de glace sont très caractéristiques de l'Antarctique, en ce qu'elles représentent plus de 10% de la surface du continent, seulement 2.5% du volume de la calotte, et qu'elles supportent 80% de la décharge de la glace posée (voir *e.g.* [129]).

La figure 1.3 représente une vue tridimensionnelle du glacier émissaire Mertz situé en Antarctique (voir figure 1.5) et de sa topographie environnante. Un profil vertical d'une ligne d'écoulement du glacier Mertz obtenu par un radar aéroporté dans le cadre du programme américain ICECAP en 2010 (voir [67]) est largement utilisé dans la suite de ce travail pour la simulation numérique. La figure 1.4 montre une vue satellite du glacier Mertz sur laquelle est représentée la ligne d'écoulement suivie par l'avion pour l'extraction du profil radar ainsi que la ligne d'échouage. Ce glacier est un exemple typique de glacier émissaire.

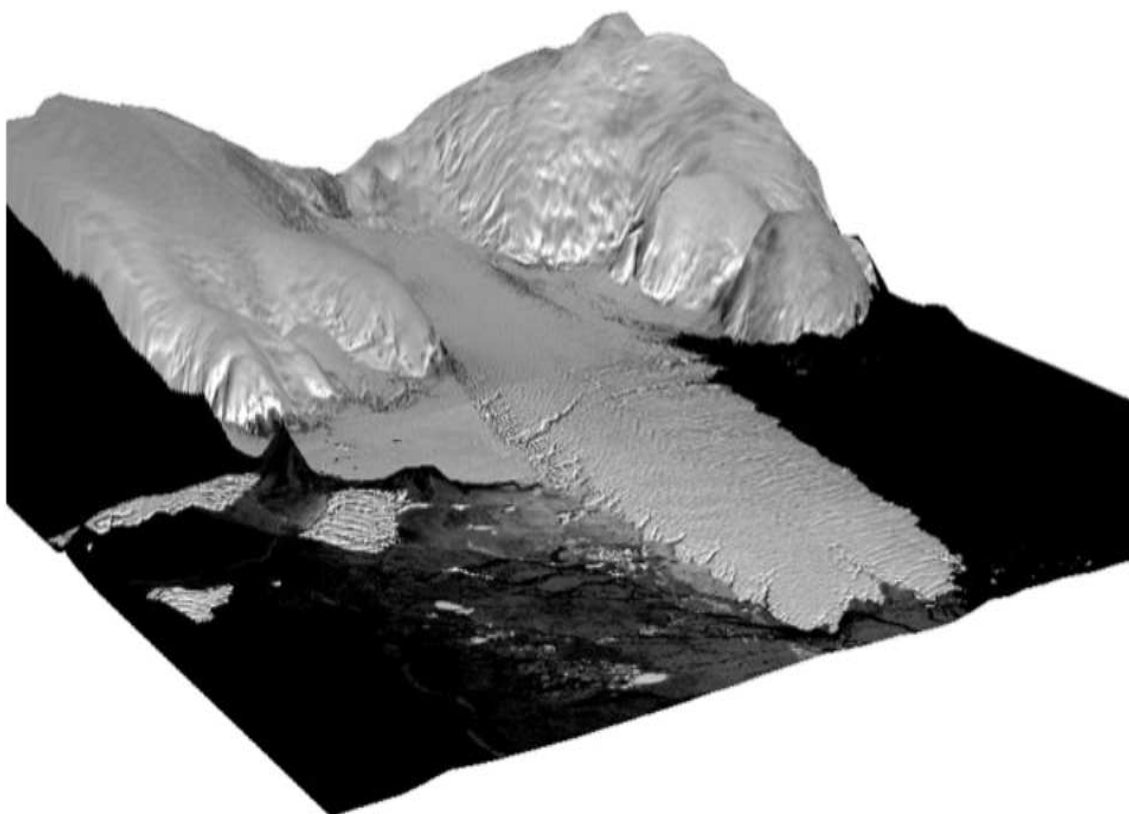


**Figure 1.2:** Illustration schématique du processus de vèlage et des différents écoulements mis en jeu. Avec la courtoisie de Kevin Hand, Scientific American. Image adaptée de [15]

En termes de modélisation, le processus global de vèlage (voir figure 1.2) permet de distinguer trois situations principales d’écoulements de la glace sur les calottes polaires : la *glace posée*, les *langues de glace* ou glace flottante (*ice-shelf*) et les *fleuves de glace* (*ice-streams*). Bien qu’une nuance existe entre les terminologies de glaciers émissaires et de fleuves de glaces, attachée à la présence (ou à l’absence respectivement) d’une topographie “canalisant” l’écoulement (voir *e.g.* [16]), le type d’écoulement résultant en termes de géométrie et de vitesse est similaire et on se restreindra à l’utilisation de la deuxième par la suite.

Il est commun de distinguer les glaciers à partir de leurs caractéristiques thermiques. Ces trois situations d’écoulement de glaces polaires appartiennent à la catégorie des *glaciers froids* dont la température est inférieure à  $0^{\circ}\text{C}$  pour l’ensemble du fluide sauf éventuellement pour une couche limite basale au point de fusion. L’autre grande catégorie thermique de glaciers est celle des glaciers tempérés pour lesquels la glace est à une température de  $0^{\circ}\text{C}$  sur toute son épaisseur sauf dans une couche de surface sensible aux températures extérieures. Tout glacier qui n’est pas tempéré est un glacier froid.

Si ces différents écoulements ne se distinguent pas par leur classification thermique, une distinction majeure peut être faite en termes de conditions basales. La glace posée est un écoulement lent plutôt représentatif d’une base gelée, en adhérence ou friction très forte avec un socle rocheux rigide. L’écoulement est alors principalement cantonné à la déformation plastique. À l’opposé, les langues de glace, nourries par les fleuves, avancent directement sur l’eau et la friction entre les deux milieux

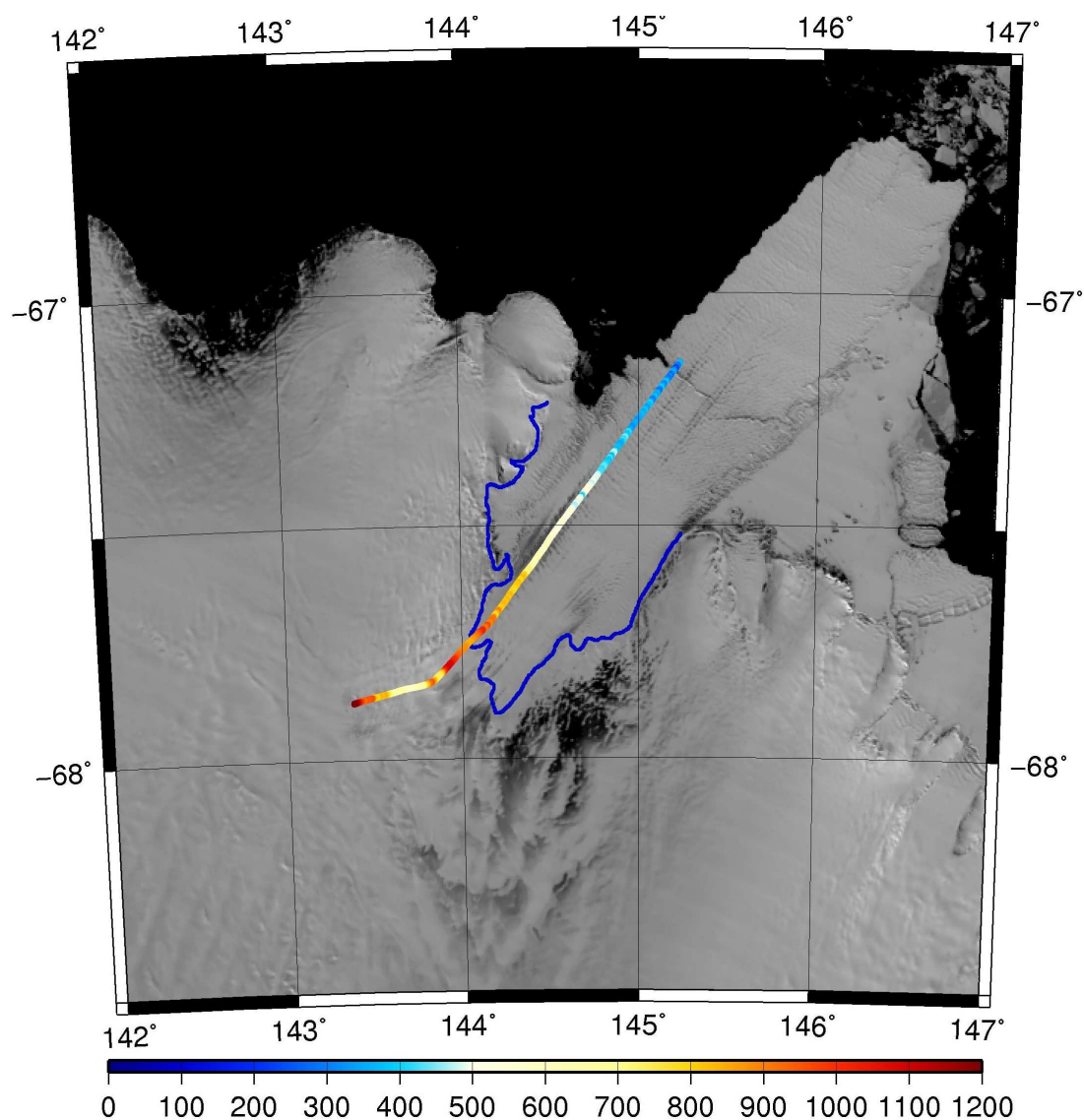


**Figure 1.3:** Image drapée sur le DEM-SPIRIT du glacier Mertz (voir [102]). ©CNES 2008 / Distribution Spot Image.

est alors extrêmement réduite.

L'écoulement très rapide des fleuves de glace (10 à 100 fois plus rapide que la glace posée) est dû à une combinaison de facteurs complexes dont les principaux éléments sont des conditions basales variables spatialement et temporellement et amenant globalement une contribution positive importante à l'écoulement vers la côte. Une variabilité de l'état du socle est également observée pour des glaciers de montagnes notamment à travers les phénomènes de crues glaciaires ou *surge* (voir l'exemple du glacier *Variegated* traité en section 3.5.2). Les différents processus mis en jeu dans la modélisation du glissement basal sont détaillés en section 2.5.

Le tableau 1.1 donne des grandeurs caractéristiques pour chacun de ces écoulements ainsi que pour celui associé à un glacier alpin (voir *e.g.* [69, 143]). On introduit



**Figure 1.4:** Image ModIS (Moderate resolution Imaging Spectroradiometer) obtenue par le satellite américain Terra le 16 novembre 2007. L'échelle de couleur de la ligne de vol suivie par le radar aéroporté indique l'épaisseur de glace en mètres. Le trait bleu représente la ligne d'échouage déterminée par interférométrie radar (voir section 3.4.1). Le domaine de calcul et sa discrétisation, obtenus à partir de ce profil, sont représentés sur la figure 4.6 pour la partie posée (en amont de la ligne d'échouage). Le domaine incluant la partie flottante en aval de la ligne d'échouage est représenté sur la figure 7.3.

1.1. Historique et généralités sur la modélisation de l'écoulement des glaces terrestres

Grandeur	Glace posée	Fleuve de glace	Glace flottante	Glacier alpin
[L]	$10^6$	$10^5$	$5.10^5$	$10^4$
[H]	$10^3$	$10^3$	$5.10^2$	$10^2$
[U]	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-7}$
[t]=[L]/[U]	$10^{12}$	$10^{10}$	$5.10^{10}$	$10^{11}$
$\varepsilon$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$
$Re$	$10^{-14}$	$10^{-13}$	$5.10^{-14}$	$10^{-16}$
$Fr$	$10^{-16}$	$10^{-14}$	$2.10^{-14}$	$10^{-17}$

**Table 1.1:** Estimation des ordres de grandeur des dimensions et vitesse caractéristiques pour les différents type d'écoulements de glace (en unités S.I.) et nombres adimensionnels résultants

alors les grandeurs adimensionnelles classiques suivantes :

$$\text{Rapport d'aspect : } \varepsilon = \frac{[H]}{[L]} \quad (1.1)$$

$$\text{Nombre de Froude : } Fr = \frac{[U]^2}{g[H]} \quad (1.2)$$

$$\text{Nombre de Reynolds : } Re = \frac{\rho[U][H]}{\eta} \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

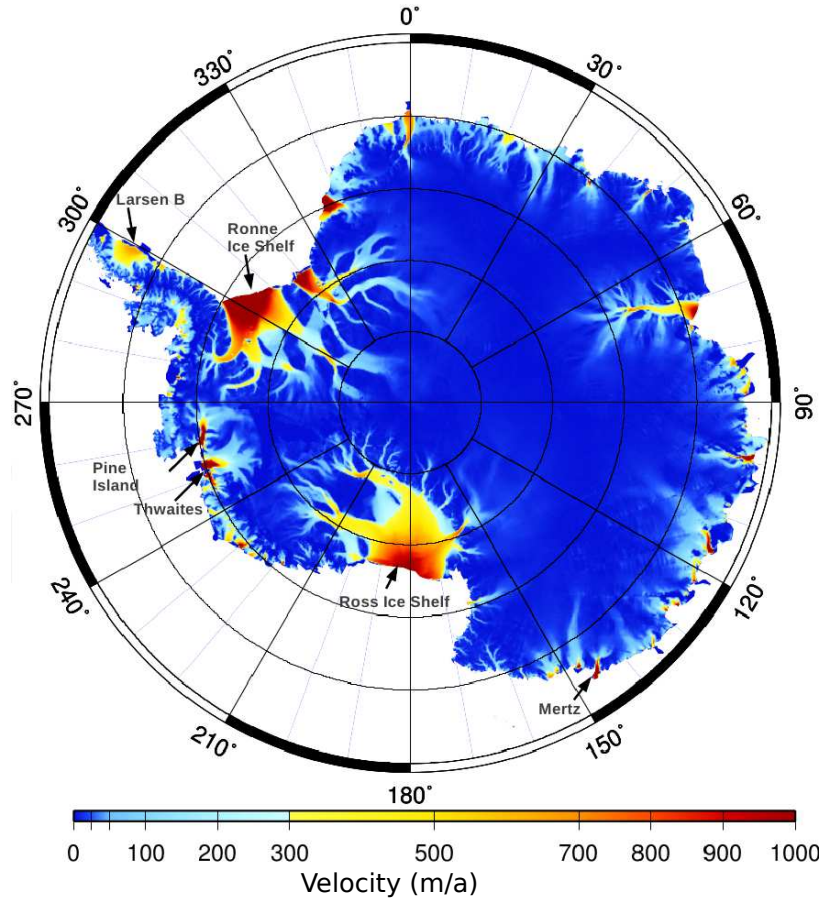
où  $g \sim 10\text{m.s}^{-2}$  désigne l'accélération de la pesanteur,  $\rho \sim 10^3\text{kg.m}^{-3}$  désigne la masse volumique de la glace et  $\eta$  sa viscosité apparente. La définition de la viscosité pour des fluides non-newtonien peut varier. Pour le présent calcul on prendra une valeur de référence  $\eta = 10^{14}\text{Pa.s}$ . On rappelle que le nombre de Reynolds quantifie le rôle relatif des effets inertiels par rapport aux effets visqueux et le nombre de Froude celui de l'énergie cinétique par rapport à l'énergie potentielle.

Les valeurs résultantes sont également donnés dans le tableau 1.1. Une valeur plus exacte du nombre de Reynolds généralisé aux écoulements en loi de puissance est donnée en section 4.8.2.

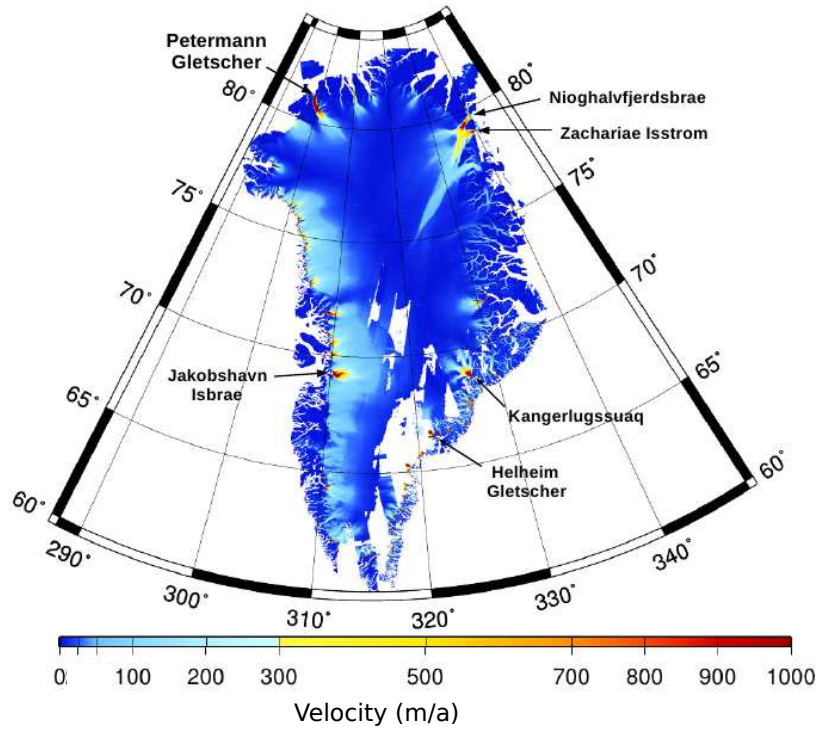
L'écoulement d'un glacier de montagne, de par ses dimensions plus modestes, présente les plus faibles *Reynolds* et *Froude*. Les écoulements côtiers que sont les fleuves de glace et glaces flottantes arborent des régimes très similaires en termes de Froude du fait de leur vitesse élevée. La glace posée, représentative des écoulements à l'intérieur de la calotte, présente les plus grandes dimensions pour une vitesse plus réduite (voir Figure 1.5).

Les différents régimes présentés ont tous en commun une viscosité très élevée attachée à de grandes dimensions géométriques. Les nombres de Reynolds et de Froude





(a) Vitesses de surface en Antarctique en mètres par an



(b) Vitesses de surface au Groenland en mètres par an

**Figure 1.5:** Vitesses de surface mesurées, compilation d'observations satellitaires sur plus de 20 ans réalisées par des techniques d'interférométrie radar et de corrélation complexe d'images, données issues de [144] pour l'Antarctique et de [95] pour le Groenland

sont extrêmement faibles ; l'écoulement est donc en régime laminaire et fluvial et les approximations attachées à ces régimes (notamment l'absence de l'accélération et des forces inertielles) seront valables même dans les situations extrêmes pouvant être rencontrées pour ce type d'écoulement.

Cependant les grandes échelles observées pour chacun de ces écoulements sont associées à un faible rapport  $\varepsilon$ . Ils présentent donc un aspect peu profond et les caractéristiques géométriques d'un film mince.

## 1.2 Problématique d'échelle

Il existe à ce jour un nombre important de modèles mathématiques et numériques d'écoulement de glace présentant des niveaux de raffinement et d'approximation variés. Tous ont en commun une approximation relative au caractère mince de l'écoulement de glace terrestre à l'exception notable de la modélisation fluide à travers la résolution des équations de Stokes non-linéaire. Cependant, les applications réalistes aux échelles continentales basées sur les équations primitives sont encore aujourd'hui difficilement accessibles en termes de coût de calcul et les rapports d'aspects présentés dans la table 1.1 valident a priori l'utilisation d'approximations liées à la faible épaisseur du domaine.

Le modèle le plus simple et, de par son antériorité, le plus largement utilisé, nommé *shallow-ice approximation* (SIA), est dû à Hutter [84]. L'approximation ondes longues fait l'hypothèse de faibles variations de la topographie du socle et de la surface autour d'une pente moyenne. Des modèles dits "d'ordre supérieur" étendent le modèle SIA en intégrant des effets des contraintes longitudinales (voir *e.g.* [21],[135]). D'autres encore intègrent le caractère anisotrope de la glace (voir *e.g.* [116]). Le pendant du modèle SIA pour la simulation des écoulements rapides que sont les fleuves de glace et glaces flottantes est nommé *shallow-shelf approximation* ou SSA (voir [126],[114]). Tous ces modèles sont mono-régime dans le sens où ils ne sont valables que pour une gamme de valeurs de nombres de Reynolds et de Froude. Une nouvelle approche récente et unificatrice (dans le cadre des modèles *shallow*), valide pour l'ensemble des régimes indiqués dans le tableau 1.1, est abordée dans [24, 25].

Quel que soit le modèle considéré, la principale difficulté pour la simulation de ces écoulements réside dans la spécification des conditions limites et tout particulièrement à l'interface glace-roche. La résistance à l'écoulement au niveau de cette interface peut varier de plusieurs ordres de grandeur et dépend notamment des caractéristiques de rugosité et de déformabilité du sédiment basal, de la pression exercée par le réseau hydraulique sous-glaciaire, du flux géothermique induisant une possible

fusion locale de la glace et une lubrification de l'interface et, plus généralement, du couplage de ces effets spatialement et temporellement (voir *e.g.* [167]).

Or, la contrainte de glissement n'est pas résolue à travers une loi de conservation dans les modèles présentés précédemment. Les vitesses basales sont alors explicitement fournies à travers une loi de glissement de type Navier à laquelle sont couplées des paramétrisations variées et faiblement contraintes des différents phénomènes en jeu dans le glissement basal (voir *e.g.* [137],[92]). Il s'ensuit une incapacité pour ces modèles numériques à simuler l'ensemble des régimes d'écoulement distingués plus haut, de l'adhérence au glissement rapide (voir [26], [157]).

Par ailleurs, des déficiences dans des situations de forte pente pour le modèle SIA ont été observées (voir [107]). Bueler et al. [26] mettent également en évidence la propagation sur l'épaisseur d'une singularité basale sur les vitesses horizontales issues du modèle SIA au point de transition adhérence-glissement.

De plus, on sait aujourd'hui qu'un nombre limité de fleuves de glace et de glaciers émissaires domine le drainage de la masse par les côtes. Or, les modèles numériques actuels ne sont pas capables de capturer les détails de ces fleuves de glace et de leurs bassins de drainage individuellement (voir [160] et figure 1.5). Le couplage nécessaire des modèles SIA et SSA à la ligne d'échouage (*i.e.* à la transition glace posée/glace flottante) n'est pas effectué de manière consistante actuellement. Une possibilité de couplage est abordée dans [158] à travers des équations d'ordre supérieur mais aucun modèle d'écoulement global n'implémente aujourd'hui une telle fonctionnalité.

Ces différents problèmes sont assez justement résumés par les auteurs de [100] qui indiquent comme un défi majeur pour la modélisation glaciologique la simulation numérique dynamiquement couplée des glaces posées, glaces flottantes et fleuves de glace à haute résolution.

Cependant, les approximations inhérentes à ces modèles grande échelle ne sont pas adaptées à la modélisation de phénomènes mis en jeu à des échelles de l'ordre de quelques épaisseurs de glace. Or il est désormais acquis que la simulation réaliste des calottes polaires à l'échelle continentale passe par une description fine des zones de dimensions réduites que sont les bassins de drainage. Ces zones sont sujettes à des variations de courtes longueurs d'onde, principalement dans l'état du socle, et la sensibilité des écoulements à ce type de variations est encore méconnue. La modélisation en équations primitives (Stokes non-linéaire), directement issue des lois de conservations, est donc à priori requise dans ces zones.

### 1.3 L'élévation du niveau des mers

Il est globalement admis par la communauté scientifique qu'un réchauffement global induit par l'augmentation de l'activité anthropique aux cours des deux derniers siècles est identifiable sans équivoque. Le dernier rapport du Groupe d'experts

Intergouvernemental sur l'Évolution du Climat (GIEC, IPCC en anglais, [87]) indique une augmentation de la température mondiale de  $0.74^{\circ}\text{C}$  au cours du vingtième siècle. Par comparaison, l'augmentation de la température depuis le dernier maximum glaciaire est de  $5^{\circ}\text{C}$  sur plus de 10000 ans. Ce réchauffement climatique est le premier facteur de l'élévation du niveau des mers et conjointement l'élévation du niveau des mers est donc un indicateur important pour l'évaluation du réchauffement climatique.

Deux phénomènes majeurs, conséquences de l'augmentation de la température, contribuent à l'élévation du niveau des mers : l'expansion thermique (dilatation de l'eau sous l'effet du réchauffement) et l'apport d'eau douce issu du bilan de masse négatif des glaces terrestres. Le GIEC chiffre les proportions respectives de ces contributions à l'élévation globale du niveau des mers à 50% sur la période 1993 – 2003. Cazenave et al. [30] estiment la contribution des glaces terrestres à 60% sur la période 1993 – 2007 en précisant que la récente accélération de l'amincissement des calottes polaires peut amener cette proportion à 80% sur les 5 dernières années. Rignot et al. [145] confirment ces estimations en donnant une accélération moyenne de la décharge des calottes polaires sur les 18 dernières années de  $36.3\text{Gt/a}^2$  soit 3 fois celle des glaciers de montagnes et des calottes glaciaires, faisant des calottes polaires le premier contributeur à l'élévation du niveau des mers pour le XXI<sup>e</sup> siècle.

En outre, les projections sur le niveau des mers pour l'année 2100 réalisées par le GIEC avancent une élévation d'environ 35cm (voir [88]) là où une étude plus récente de Rahmstorf [139], basée sur une relation semi-empirique entre température globale observée et niveau des mers, avance une valeur moyenne de 85cm soit environ 2.5 fois plus. Une valeur similaire de 80cm est avancée par Pfeffer et al. [134]. Il semble établi aujourd'hui que la projection réalisée par le GIEC est une borne inférieure considérant qu'elle ne tient pas compte de la perte de masse dynamique des calottes polaires par les glaciers émissaires et le processus de vêlage. La raison de cette omission est une compréhension jugée trop partielle du phénomène pour le quantifier raisonnablement.

## 1.4 Synthèse des problématiques et annonce du plan

L'ensemble des considérations précédentes amène à la conclusion que la modélisation et par conséquent la simulation numérique de la dynamique de la glace, et tout particulièrement des calottes polaires, est prometteuse mais nécessitent des améliorations significatives parallèlement à une acquisition de données plus nombreuses. Les principaux facteurs limitants dans la description précise de cette dynamique sont :

- l’absence d’équations unifiées permettant une description fine de l’ensemble des régimes de vitesse à grande échelle,
- le coût de calcul rédhibitoire des simulations à grande échelle en équations primitives,
- la complexité de la modélisation multiphysique des interactions entre le fluide et son socle induisant une surparamétrisation empirique des modèles à travers des grandeurs dont le rôle dans la description de ces interactions est potentiellement mal pondéré,
- l’absence d’un nécessaire couplage des effets multiéchelle entre la dynamique continentale multirégime, la dynamique des plateformes de glace et la dynamique à petite échelle de la transition à la ligne d’échouage.

La première de ces problématiques n’est pas traitée dans le présent travail. En revanche, les autres champs d’investigation soulevés ci-dessus sont les principales questions abordées dans ces travaux de recherche.

Le chapitre 2 présente la modélisation de la dynamique de la glace, en tant que fluide visqueux, considérée tout au long de ce travail. Après un bref historique, on introduit les différentes modélisations du milieu continu général en termes de lois de conservations et les caractéristiques spécifiques associées au comportement quasi-newtonien considéré pour la glace. Deux modélisations caractéristiques liées au comportement thermique de la glace et à l’interaction du fluide avec son socle rocheux sont détaillées. Ces descriptions, récurrentes pour la modélisation de la dynamique de la glace, ainsi que le comportement en loi de puissance du fluide, s’avèrent en réalité représentatives d’une gamme de fluides géophysiques plus large dans laquelle on peut inclure notamment les boues, les laves torrentielles ou les argiles. On synthétise finalement l’ensemble de ces descriptions au sein d’un modèle d’écoulement gravitaire d’un fluide géophysique non-newtonien à surface libre.

Le chapitre 3 détaille le principe général de dérivation d’un modèle adjoint associé à un système d’équations aux dérivées partielles elliptique. Les outils d’analyse de sensibilité et d’assimilation variationnelle de données sont décrits dans ce contexte. L’implémentation du modèle adjoint obtenu par différentiation automatique ainsi que sa validation sont présentées. On réalise ensuite une revue des différentes données et observations de la cryosphère actuelle et de leurs rôles du point de vue de la modélisation inverse de ces écoulements. On termine par une synthèse de ces différents éléments au travers du développement du code de calcul *DassFlow-Ice* réalisé au cours de cette thèse, conclue par la présentation d’une première application du logiciel sur un glacier de montagne en Alaska. Le rôle dominant de la modélisation

du socle est mis en évidence et une identification du coefficient de friction à partir de données de surface réelles est réalisée.

On présente dans le chapitre 4 la formulation faible du problème de Stokes quasi-newtonien précédemment introduit ainsi que les méthodes de résolution classiques utilisées pour traiter la non-linéarité. Des limitations de ces méthodes sont mises en avant et servent de point de départ à la dérivation d'un nouveau solveur direct. L'introduction du tenseur des taux de déformation comme une inconnue du problème permet de découpler la non-linéarité, issue de la loi de comportement, du système de Stokes, qui devient alors une contrainte associée au problème de minimisation d'énergie. Le lagrangien associé décrit alors un problème de point-selle à quatre champs résolu par un algorithme de type lagrangien augmenté. L'algorithme final s'avère particulièrement performant en temps de calcul parallèlement à une consommation mémoire très réduite. Les résultats obtenus sont probants et offrent des perspectives par rapport à la problématique du coût de calcul élevé associé à la résolution d'un tel modèle sur des systèmes à grande échelle.

Le problème de la surparamétrisation est étudié à travers les analyses de sensibilité des chapitres 4 et 5 pour la modélisation du glissement et de la rhéologie. La sensibilité à la friction rend compte du caractère dominant de cette modélisation au sein du modèle du point de vue de l'état de la surface. Par ailleurs, des phénomènes de courtes longueurs d'onde dans le coefficient de friction, dont l'effet sur les vitesses de surface est réduit, apparaissent distinctement dans les analyses de sensibilité. L'une des conséquences de cette observation est la possibilité d'utiliser les analyses de sensibilité comme une aide à la définition de zones d'intérêt dans les écoulements. Une autre est la possibilité de lire à travers le caractère non-local et fortement filtré de la transmission de l'information basale vers la surface. La sensibilité à la rhéologie à travers les deux paramètres que sont la consistance du fluide et l'exposant rhéologique met en évidence le rôle dominant de la modélisation au fond. Le couplage de la modélisation thermique au sein du modèle d'écoulement, réalisé à travers le calcul de la consistance du fluide, apparaît de moindre importance : le modèle est faiblement sensible à cette modélisation et l'identification de ce paramètre à partir d'observations de surface s'avère difficile à réaliser et peu fiable. À ce titre, l'utilisation d'un modèle empirique éprouvé semble plus judicieuse qu'une difficile calibration de paramètres.

La problématique multiéchelle est abordée dans le chapitre 6 à travers la question de l'identifiabilité du coefficient de friction. La capacité à obtenir des informations sur le fond à partir d'observations de surfaces est quantifiée en termes de signal reconstruit (fréquences et longueurs d'onde). Les niveaux de variation de la friction accessibles par la méthode de l'adjoint sont comparés à des résultats antérieurs utilisant d'autre méthodes et s'avèrent significativement supérieurs, avec une dépen-

dance au régime de glissement considéré. Le procédé d'accumulation retour utilisé pour le calcul de l'état adjoint (issu du contexte de différentiation automatique) est présenté comme une algorithmique modulable donnant accès à tous niveaux de précision dans l'identification, ajustable en fonction de l'échelle et de la qualité des données considérées, permettant un gain en temps de calcul et en occupation mémoire important, sans y sacrifier la précision du résultat.

Tous ces traitements sont réalisés à partir d'une modélisation directe par le problème de Stokes et inverse par le problème adjoint associé, sans introduire de simplifications dans le modèle mathématique. Les résultats sont donc fiables et précis, affranchis des problèmes inhérents à l'approximation couche mince ; ils permettent plus généralement de quantifier le potentiel des méthodes inverses en glaciologie à travers leur version la plus fine.

On rappelle en conclusion l'ensemble des résultats obtenus avant de présenter des perspectives à ce travail notamment sur le problème de modélisation de la ligne d'échouage en tant que singularité mathématique issue d'un changement de conditions aux limites.

On présente en annexe la méthode de recyclage d'un solveur linéaire "boîte noire" pour réutilisation au sein d'un modèle adjoint obtenu par différentiation automatique ainsi que les différentes méthodes et schémas numériques standards utilisés dans la version 3D du logiciel.

# Modélisation directe des écoulements de glace

---

2.1	LA GLACE : HISTOIRE D'UN FLUIDE RAMPANT . . . . .	19
2.2	RAPPELS DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS . . . . .	21
2.2.1	<i>Déformations</i> . . . . .	21
2.2.2	<i>Contraintes : la méthode de Cauchy</i> . . . . .	22
2.2.3	<i>Fluide visqueux</i> . . . . .	24
2.3	LOIS DE CONSERVATION . . . . .	24
2.4	LOI DE PUISSANCE, LOI DE GLEN ET MODÉLISATION THERMIQUE . . . . .	26
2.4.1	<i>Loi de comportement</i> . . . . .	26
2.4.2	<i>Modélisation thermique</i> . . . . .	30
2.5	MODÉLISATION DU SOCLE : REVUE DES LOIS DE GLISSEMENT . . . . .	31
2.5.1	<i>Glissement sur un socle rigide : la théorie de Weertman</i> . . . . .	32
2.5.2	<i>Glissement sur un socle déformable</i> . . . . .	36
2.5.3	<i>Bilan</i> . . . . .	37
2.6	MODÈLE D'ÉCOULEMENT DE FLUIDE GÉOPHYSIQUE QUASI-NEWTONIEN À SURFACE LIBRE . . . . .	38
2.6.1	<i>Le modèle d'écoulement</i> . . . . .	38
2.6.2	<i>Formulation du problème instationnaire</i> . . . . .	40

---

On présente dans ce chapitre les différentes composantes d'un modèle de dynamique de la glace en tant que milieu continu de type fluide visqueux. La modélisation de la rhéologie et du glissement basal sont notamment détaillés. L'ensemble des descriptions est résumé au sein d'un modèle plus large d'écoulement géophysique quasi-newtonien à surface libre. On commence, tout d'abord, par un bref historique de la modélisation des écoulements de glace.

## 2.1 La glace : histoire d'un fluide rampant

L'historique de cette section s'inspire de *e.g.* Rémy et Testut [149] et Blatter et al. [22]. On renvoie à ces références pour de plus amples détails sur l'histoire de



la description de la dynamique de la glace.

Le terme “fluide” est employé en 1773 pour la première fois pour qualifier la glace par le naturaliste genevois André-César Bordier [23]. Il écrit que “la masse entière des glaces est liée ensemble et pèse l’une sur l’autre de haut en bas à la manière des fluides”. Cependant l’idée ne sera pas retenue. Une théorie longuement en vogue, proposée par Johann Scheuchzer en 1705 et reprise par Jean de Charpentier en 1830, explique le mouvement des glaciers par un système de fonte-regel de la glace à la base du glacier. En gelant, l’eau se dilate et soulève le glacier, provoquant ainsi son déplacement. Parallèlement, une autre théorie, avancée par Gotlieb Gruner en 1760 et reprise plus tard par Horace de Saussure, attribue le mouvement des glaciers à un glissement sur leur base. En 1840, le suisse Louis Agassiz défend ardemment les théories de de Charpentier sur l’avancée par dilatation tout en rejetant avec force les théories de de Saussure sur le glissement basal. Une variation sur ce thème de fonte-regel, conciliant le paradoxe apparent du caractère à la fois solide et ductile de la glace, proposée par John Tyndall et Michael Faraday en 1873 et soutenue par des faits expérimentaux, deviendra la seule théorie consensuelle durant plusieurs décennies. Cette difficulté à concevoir la déformation de la glace est principalement due à la distinction formelle entre un corps solide et un corps fluide, qui repose sur des considérations mécaniques de comportement en traction et cisaillement nécessairement associées à une échelle de temps “humaine”.

En 1920, Weinberg et Somigliana développent la théorie mathématique du *fluage* (déformation au cours du temps d’un matériau soumis à une charge fixe) où la glace est considérée comme un fluide newtonien très visqueux. Cependant, un certain nombre d’anomalies, pointées par des mesures *in-situ* (notamment une grande sensibilité à une faible variation de contraintes où bien une variabilité importante des vitesses d’écoulement à l’échelle de la journée) soulevaient de nombreuses questions. Le métallurgiste Orowan et le physicien des solides Perutz incorporent en 1948 le concept de plasticité dans la description de la dynamique de la glace. Classique en physique des solides, ce comportement stipule que le corps ne se déforme qu’au delà d’une contrainte seuil à partir de laquelle il se comporte comme un fluide parfait (non visqueux). Cependant, des objections sont émises sur la validité d’une description purement plastique du mouvement de la glace ; selon le type de glaciers, le comportement semblerait plutôt visqueux ou plutôt plastique.

Le débat prendra finalement fin avec John Glen qui, grâce à un protocole expérimental rigoureux, observe un comportement intermédiaire entre fluide visqueux newtonien et solide plastique. Dans le célèbre article [59], Glen énonce la loi reliant contrainte et déformation sous la forme d’une loi de puissance. Depuis 1955, la description de la dynamique de la glace par les équations de la mécanique des fluides couplée à la loi de comportement en loi de puissance énoncée par Glen n’a jamais

été fondamentalement remise en cause bien que de nombreuses autres propriétés rhéologiques du matériau glace aient été considérées dans les descriptions. La théorie du glissement basal est énoncée par Weertman [172] qui propose une description du glissement sur un socle rigide, description encore largement dominante dans la glaciologie moderne.

## 2.2 Rappels de mécanique des milieux continus

Les écoulements de fluide considérés ici sont décrits en utilisant les concepts de la mécanique des milieux continus. L'un des objectifs basique de la mécanique des milieux continus est de décrire comment un matériau continu soumis à une force se déforme et comment la réponse à cette contrainte peut être décrite par une relation constitutive liant la contrainte à la déformation.

### 2.2.1 Déformations

On se place en description lagrangienne, c'est à dire que l'on considère l'existence d'une fonction  $\varphi$  qui à une configuration initiale  $\Omega_0$  du milieu continu associe l'état courant  $\Omega(t)$ . Autrement dit :

$$\begin{aligned}\varphi : \Omega_0 &\rightarrow \Omega(t) \\ \mathbf{X} &\mapsto \varphi(\mathbf{X}, t) = x(t)\end{aligned}$$

où  $\mathbf{X}$  représente les coordonnées initiales de Lagrange d'une particule  $P$  du milieu continu et  $x(t)$  représente la position de la particule à l'instant  $t$ . Dans ce cas, on notera  $d(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$  le vecteur déplacement et  $v(x, t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t}$  la vitesse d'une particule.

Un milieu continu subit des déformations si les distances relatives entre les particules varient au cours du temps. Ainsi, considérant un vecteur  $d\mathbf{X} = \mathbf{X}' - \mathbf{X}$  représentant la distance entre deux particules  $P$  et  $P'$  à l'instant initial, on s'intéresse alors à la position  $x'$  de la particule  $P'$  à l'instant  $t$ . On obtient, à l'aide d'un développement de Taylor :

$$x' = \varphi(\mathbf{X}', t) = \varphi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) + \nabla_{\mathbf{X}}\varphi(\mathbf{X}, t)d\mathbf{X} + |d\mathbf{X}|\varepsilon(d\mathbf{X})$$

On définit ainsi la matrice *gradient de la déformation*  $\underline{\mathbf{F}}$  :

$$\underline{\mathbf{F}} = \nabla_{\mathbf{X}}\varphi(\mathbf{X}, t)$$

À l'aide de  $\underline{\mathbf{F}}$ , on peut définir le *tenseur des dilatations*  $\underline{\mathbf{C}}$  (ou tenseur de *Cauchy-Green* à droite) :

$$\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}}$$

et, par suite, le *tenseur des déformations*  $\underline{\mathbf{E}}$  (ou tenseur de *Green-Lagrange*) s'exprime ainsi :

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{Id}})$$

La nullité du tenseur des déformations décrit un *mouvement de corps rigide*.

Dans un cadre de description fluide, on se place sous l'*hypothèse des petites déformations* soit :  $\|\nabla d\| \ll 1$ . On a donc :

$$\underline{\mathbf{E}}(d) = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{X}} d + \underline{\mathbf{Id}})^T (\nabla_{\mathbf{X}} d + \underline{\mathbf{Id}}) - \underline{\mathbf{Id}} = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{X}} d^T + \nabla_{\mathbf{X}} d) + \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{X}} d^T \nabla_{\mathbf{X}} d$$

Au premier ordre, on a donc :  $\underline{\mathbf{E}}(d) \simeq \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{X}} d + \nabla_{\mathbf{X}} d^T)$ . On introduit alors le *tenseur des déformations linéarisés*  $\underline{\varepsilon}$  :

$$\underline{\varepsilon}(d) = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{X}} d + \nabla_{\mathbf{X}} d^T)$$

À noter que les composantes diagonales  $\varepsilon_{ii}$  représentent une approximation de *l'allongement unitaire dans la direction de base*  $e^i$  tandis que les composantes hors-diagonale  $\varepsilon_{ij}$  représentent une approximation du *demi-angle de glissement entre les directions de base*  $e^i$  et  $e^j$  (cf. *e.g.* [90]).

La variation temporelle  $\dot{\underline{\varepsilon}}$  de  $\underline{\varepsilon}(d)$  définie par  $\dot{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial t}$  engendre le *tenseur des vitesses de déformation* (ou tenseur des taux de déformation)  $\underline{\mathbf{D}}(v)$  :

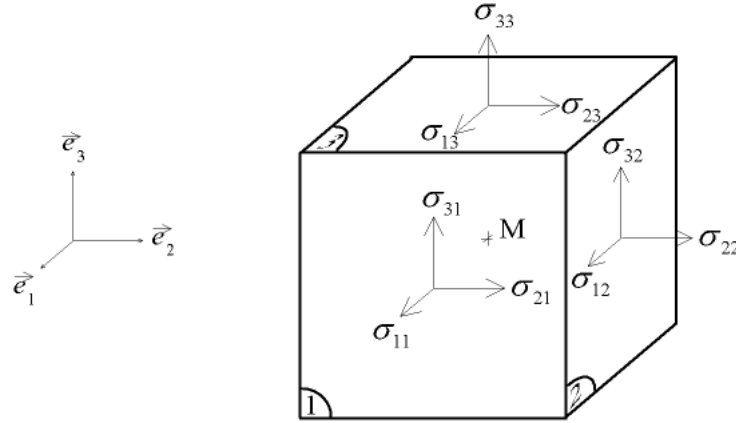
$$\dot{\underline{\varepsilon}} = \underline{\mathbf{D}}(v) = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{X}} v + \nabla_{\mathbf{X}} v^T)$$

### 2.2.2 Contraintes : la méthode de Cauchy

On considère que les efforts que subit un sous-domaine matériel  $\omega(t)$  se classent en deux familles ; d'une part, les efforts volumiques (ou efforts de champ) s'appliquant à tout point  $P$  du domaine (*e.g.* la gravité) et d'autre part, les efforts surfaciques (ou efforts de contact) qui s'appliquent en tout point de la frontière  $\partial\omega$  de  $\omega$ .

Les efforts surfaciques peuvent prendre la forme d'une action normale et/ou tangentielle. On les représente donc par une densité surfacique d'effort  $\mathbf{s}(x, \partial\omega, t)$ . Le vecteur  $\mathbf{s}$  est appelé *vecteur contrainte*.

Considérer la dépendance de  $\mathbf{s}$  à toutes les caractéristiques de la frontière du domaine  $\partial\omega$  est ambitieux. On fera donc appel, de manière classique, au postulat de



**Figure 2.1:** Composantes du tenseur des contraintes de Cauchy sur un cube élémentaire.

Cauchy sur la dépendance des efforts de contact vis-à-vis des caractéristiques de la surface : *La force de contact  $F$  au point  $x$  de la frontière de  $\omega$  ne dépend que de la normale  $\mathbf{n}$  à  $\partial\omega$  au point  $x$  soit :  $F = F(\mathbf{n})$ .*

Ce postulat définit le *caractère local* des forces de contact.

De ce postulat découle le *théorème de Cauchy* (voir par exemple [90]) qui dit que l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  qui à  $\mathbf{n}$  associe  $F(\mathbf{n})$  est linéaire. On note  $\underline{\sigma}$  une telle application soit :

$$[\underline{\sigma}]\mathbf{n} = F(\mathbf{n})$$

$\underline{\sigma}$  s'appelle le *tenseur des contraintes de Cauchy*. En 3D, il s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

On le représente classiquement sur un cube élémentaire (voir figure 2.1). Dans ce cas, les composantes diagonales de  $\underline{\sigma}$  sont perpendiculaires aux facettes du cube et sont les *contraintes de compression* (ou de traction suivant le signe) aussi appelées *contraintes normales*.

Les composantes hors-diagonale sont tangentielles à la facette considérée et correspondent aux *contraintes de cisaillement*.

Le tenseur des contraintes étant symétrique, il est diagonalisable : il possède trois valeurs propres réelles  $\sigma_i$  appelées *contraintes principales* et trois vecteurs propres

$\mathbf{n}_i$ , orthogonaux deux à deux, appelés *directions principales de contraintes* :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \text{ avec } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_i = \sigma_i \mathbf{n}_i$$

### 2.2.3 Fluide visqueux

Par définition, un fluide est un milieu qui ne peut pas résister aux contraintes de cisaillement qu'on lui applique c'est à dire que sa résistance ne peut empêcher la *déformation* et le *mouvement*.

Le tenseur des contraintes, comme tout tenseur, se décompose en une partie sphérique isotrope (ou contrainte moyenne) correspondant à la pression isostatique, et une partie déviatoire non isotrope contribuant aux contraintes tangentielles et correspondant à l'écart de la contrainte par rapport à la pression isostatique :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = -p \underline{\mathbf{Id}} + \underline{\mathbf{S}} \quad (2.1)$$

L'existence du **déviateur des contraintes**  $\mathbf{S}$  est entièrement due à l'existence d'un mouvement du fluide (cf. *e.g.* [14]).

Sous l'hypothèse des petites déformations, on peut considérer que le déviateur des contraintes  $\mathbf{S}$  est une fonction linéaire des composantes du gradient de vitesse. Cela caractérise la linéarité **locale** de la réponse du milieu continu. Autrement dit :

$$S_{ij} = A_{ijkl} D_{kl} \quad (2.2)$$

où  $D_{kl}$  représente les coefficients du tenseur des taux de déformations et  $A_{ijkl}$ , les coefficients d'un tenseur d'ordre 4, symétrique. Le tenseur  $A$  représente alors le *tenseur de viscosité*. Si l'on considère un fluide *isotrope*, on peut écrire la relation suivante :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = (-p + \lambda \text{tr}(\underline{\mathbf{D}})) \underline{\mathbf{Id}} + 2\eta \underline{\mathbf{D}}$$

Dans cette relation,  $\eta$  est appelé le coefficient de *viscosité apparente* (*shear viscosity*) et  $(\lambda + \frac{2\eta}{3})$  la viscosité de volume (*bulk viscosity*). La contrainte s'exprimant en Pa et les taux de déformations en  $\text{s}^{-1}$ . On en déduit que les coefficients de viscosité  $\eta$  et  $\lambda$  sont homogène à des  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ .

## 2.3 Lois de conservation

**Conservation de la masse** Un écoulement est dit *incompressible* quand la densité d'un élément fluide n'est pas modifiée par les variations de pression au cours du

mouvement. Cela revient à avoir une variation de la densité en fonction du temps nulle. L'équation de conservation de la masse qui en découle s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

Dans le cas incompressible, cela implique :  $\text{tr}(\underline{\mathbf{D}}) = 0$ , ce qui nous amène à la relation constitutive suivante :

$$\underline{\mathbf{S}} = 2\eta \underline{\mathbf{D}} \quad (2.4)$$

Dans le cas d'un *fluide idéal* (*i.e.* incompressible et non visqueux), la contrainte est simplement déterminée par la pression isostatique :  $\underline{\boldsymbol{\sigma}} = -p \underline{\mathbf{I}}$

Dans le cas où la relation linéaire (2.2) entre le déviateur des contraintes et les taux de déformations est valable,  $\eta$  est alors une constante de proportionnalité entre contrainte et déformation et on parle d'un *fluide newtonien*.

**Conservation de la quantité de mouvement** La loi de conservation de la quantité de mouvement s'obtient en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à un volume de fluide, *i.e.* en écrivant l'égalité entre la variation temporelle de la quantité de mouvement et l'ensemble des forces (de volumes et de surface) exercées sur ce volume. Plus précisément, pour un fluide de masse volumique  $\rho$  se déplaçant à une vitesse  $\mathbf{u}$ , soumis à des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  décrite par (2.1) et des forces de volume  $f$ , on obtient :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho f - \nabla p + \nabla \cdot \underline{\mathbf{S}} \quad (2.5)$$

L'introduction de la relation (2.4) décrivant les contraintes déviatoires pour un fluide visqueux isotrope et incompressible dans la relation (2.5) amène les équations de *Navier-Stokes*. On introduit par la suite la notion de *loi de comportement* amenant une modification mineure dans la relation (2.4) en prenant en compte la dépendance expérimentalement observée de la viscosité  $\eta$  au *taux de cisaillement*. L'équation résultante est très proche des équations de Navier-Stokes classique et décrit la dynamique d'un *fluide newtonien généralisé* ou *quasi-newtonien*.

On fera par la suite une approximation des équations de Navier-Stokes associée aux écoulements à bas Reynolds menant au problème de Stokes. Cette approximation est introduite dans le cadre de la formulation instationnaire Arbitraire Lagrange Euler présentée en section 2.6.2.

## 2.4 Loi de puissance, loi de Glen et modélisation thermique

### 2.4.1 Loi de comportement

Dans le cas d'un corps déformable, les lois de conservation du problème se résument aux bilans locaux de masse (équation de continuité) et de quantité de mouvement (équation d'équilibre) soit une équation scalaire et une équation vectorielle. D'autre part, les inconnues du problème sont la transformation  $\varphi(\mathbf{X}, t)$  et le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma} = (\sigma_{ij})$  symétrique ce qui représente 9 fonctions scalaires inconnues. Dans le cadre d'un problème stationnaire dont on néglige la thermodynamique, l'équation de continuité est automatiquement vérifiée et on obtient 3 équations scalaires pour 9 inconnues. En l'état, le système est donc mal posé. Il reste 6 équations à trouver correspondant aux expressions des 6 composantes des contraintes  $\underline{\sigma}$ . De telles équations ne sont pas universelles et prennent en compte la spécificité du matériau considéré. La relation (2.4) est la loi de comportement décrivant un fluide newtonien de viscosité constante  $\eta$ .

Une loi de comportement est l'écriture mathématique de certaines hypothèses faites sur le comportement mécanique du matériau considéré. Il en découle une nécessité d'invariance de la loi de comportement dans le cas d'un changement de repère et/ou d'un changement de référentiel. Cette nécessité peut être vue comme un postulat ou admise intuitivement et est dénommée *principe d'objectivité matérielle* (voir e.g. [6]).

**Invariants d'un tenseur** On appelle *invariants d'un tenseur* des fonctions à valeurs réelles des composantes d'un tenseur qui ne dépendent pas du choix de la base de décomposition. De tels invariants existent pour tout endomorphisme et correspondent à des fonctions des valeurs propres de l'endomorphisme considéré. Dans le cas d'un tenseur symétrique, on est assuré que ses valeurs propres sont réelles.

Dans le cas du tenseur des taux de déformations (symétrique)  $\underline{D}$ , si l'on note ses trois valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , voici les expressions classiquement utilisées :

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr}(\underline{D})$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 = \frac{1}{2}((\text{tr}(\underline{D}))^2 - \text{tr}(\underline{D}^2))$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(\underline{D})$$

Ces trois invariants sont appelés *invariants principaux* de  $\underline{D}$ .

**Fluides non newtoniens** Comme vu précédemment, un fluide newtonien est caractérisé par l'hypothèse de *linéarité* et d'*isotropie* du déviateur des contraintes par rapport aux composantes du gradient des vitesses. Cependant, on observe expérimentalement que de nombreux fluides voient leur *viscosité apparente*  $\eta$  évoluer avec l'augmentation des contraintes de cisaillement.

Des fluides dont la viscosité apparente diminue avec l'augmentation de la contrainte sont qualifiés de *rhéofluidifiants* (*shear-thinning*) ou pseudo-plastiques. Pour décrire ce type de comportement et prendre en compte les effets rhéofluidifiants, on ne fait plus l'hypothèse d'une relation linéaire entre déviateur des contraintes et vitesses de déformations comme dans la relation (2.2). Une généralisation de cette description consiste à choisir une loi de comportement de la forme  $\underline{\mathbf{S}} = g(\underline{\mathbf{D}})$ . Le principe d'objectivité matérielle appliqué à cette relation impose que le matériau considéré soit isotrope. L'isotropie de la fonction  $g$  et la symétrie du tenseur  $\underline{\mathbf{D}}$  amènent, par un théorème d'analyse tensorielle, à décrire la viscosité  $\eta$  comme une fonction des invariants du tenseur des vitesses de déformation  $\underline{\mathbf{D}}$ .

Généralisons ainsi l'équation (2.4) telle que :

$$\underline{\mathbf{S}} = 2\eta(I_1, I_2, I_3)\underline{\mathbf{D}} \quad (2.6)$$

où  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  représente les invariants principaux du tenseur des taux de déformations. Le tenseur des contraintes  $\underline{\mathbf{S}}$  est donc une fonction isotrope de  $\underline{\mathbf{S}}$  et  $\underline{\mathbf{D}}$ .

Au lieu de travailler avec les invariants principaux, il est d'usage d'utiliser les fonctions  $\underline{\mathbf{D}}_{(I)}$ ,  $\underline{\mathbf{D}}_{(II)}$  et  $\underline{\mathbf{D}}_{(III)}$  de  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ , correspondant également à des invariants de  $\underline{\mathbf{D}}$ , définies par :

$$\underline{\mathbf{D}}_{(I)} = I_1 = \text{tr}(\underline{\mathbf{D}}) \quad (2.7)$$

$$\underline{\mathbf{D}}_{(II)} = I_1^2 - 2I_2 = \text{tr}(\underline{\mathbf{D}}^2) \quad (2.8)$$

$$\underline{\mathbf{D}}_{(III)} = 3I_3 + I_3^3 - 3I_1I_2 = \text{tr}(\underline{\mathbf{D}}^3) \quad (2.9)$$

Dans le contexte que l'on se donne, on considère des fluides *incompressibles*, *i.e.* tel que  $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ . Il suit immédiatement que  $\underline{\mathbf{D}}_{(I)} = I_1 = 0$ . Par ailleurs, la viscosité apparente étant généralement mesurée en écoulement cisailé simple (écoulement de *Couette*), l'indépendance à  $\underline{\mathbf{D}}_{(III)}$  est une hypothèse standard car une telle dépendance ne pourrait être détectée expérimentalement.

**Fluide en loi de puissance** Il est classique de caractériser la vitesse de déformation par le *taux de cisaillement*  $\dot{\gamma}$  qui correspond, pour un écoulement de Couette au gradient de vitesse  $\partial u_x / \partial z$  (dans le plan euclidien  $(x, z)$ ).



De manière plus générale, le taux de cisaillement correspond à une fonction du second invariant du tenseur des taux de déformation  $\underline{\mathbf{D}}_{(II)}$  et s'exprime ainsi :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}(\underline{\mathbf{D}} : \underline{\mathbf{D}})} = \sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}(\underline{\mathbf{D}}\underline{\mathbf{D}}^T)} = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\mathbf{D}}_{(II)}} \text{ (car } \underline{\mathbf{D}} \text{ est symétrique)}. \quad (2.10)$$

**Remarque 1** : Le second invariant d'un tenseur  $\underline{\mathbf{T}}$  tel que défini par (2.8) correspond au carré de la norme de Frobenius du tenseur  $\underline{\mathbf{T}}$  soit :

$$\|\underline{\mathbf{T}}\|_F = \sqrt{\underline{\mathbf{T}} : \underline{\mathbf{T}}} \quad (2.11)$$

et de produit scalaire associé  $\langle . , . \rangle_F$  tel que :

$$\langle \underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}} \rangle_F = \text{tr}(\underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{B}}) \quad (2.12)$$

Dans ce cas,  $\dot{\gamma}$  s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\underline{\mathbf{D}}\|_F \quad (2.13)$$

On introduit, de manière analogue au taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , la *cission efficace*  $\tau$  définit par :

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}(\underline{\mathbf{S}}^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\underline{\mathbf{S}}\|_F \quad (2.14)$$

Le comportement en loi de puissance, initialement proposé par *Ostwald* en 1925, s'applique pour les fluides où l'on observe que la viscosité apparente  $\eta$  varie avec une puissance de  $\dot{\gamma}$  soit :

$$\tau = K \dot{\gamma}^\alpha, \quad \alpha > 0 \quad (2.15)$$

En prenant la norme de Frobenius de l'équation (2.6), la viscosité s'écrit donc :

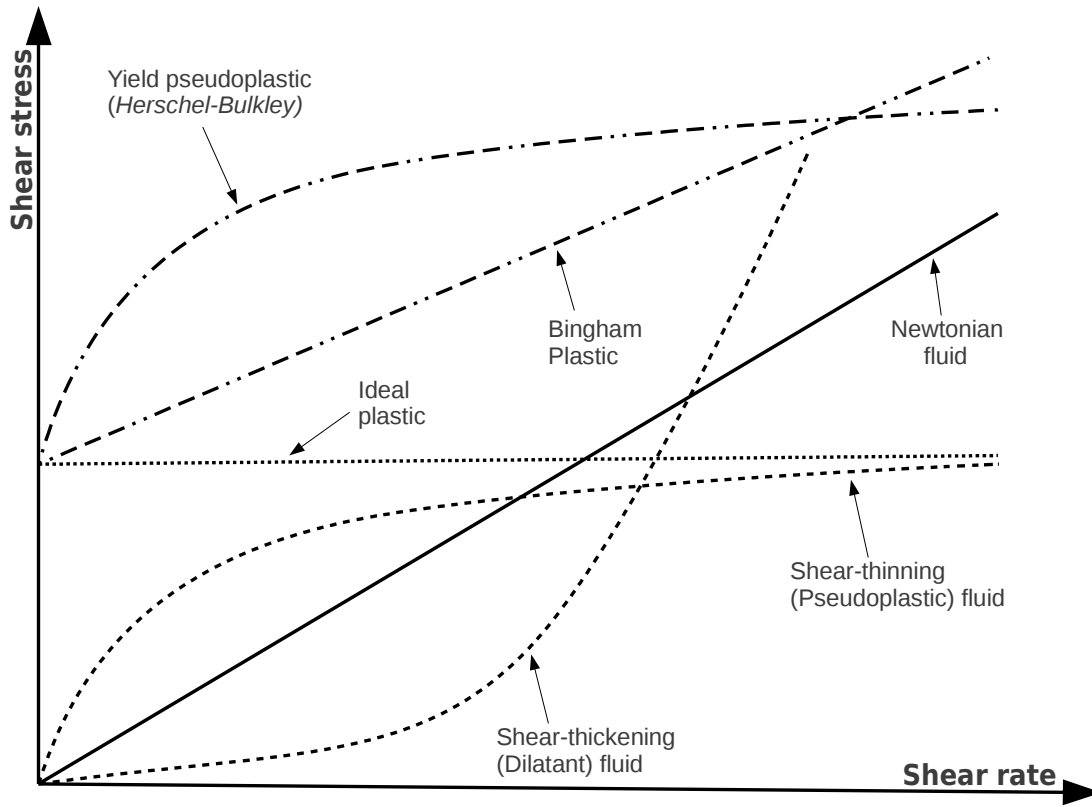
$$\eta = \frac{1}{2} K \dot{\gamma}^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0 \quad (2.16)$$

et la loi de comportement s'écrit alors :

$$\underline{\mathbf{S}} = \sqrt{2}^{1-\alpha} K \|\underline{\mathbf{D}}\|_F^{\alpha-1} \underline{\mathbf{D}} \quad (2.17)$$

Sous cette forme, un exposant  $\alpha < 1$  correspond à un fluide rhéofluidifiant, alors que  $\alpha > 1$  correspond à un fluide rhéoépaississant. On retrouve le comportement newtonien de viscosité constante  $\eta = K$  pour la valeur  $\alpha = 1$ . Selon la communauté, on trouve cette loi rhéologique sous des dénominations très variées comme loi de Norton, de Norton-Hoff, d'Odqvist-Norton, loi d'Ostwald (et probablement d'autres). On utilisera essentiellement la dénomination générale de *loi de puissance* par la suite.

Ce type de loi se retrouve dans de nombreuses modélisation mathématiques d'écoulements comme ceux des polymères (voir *e.g.* [20], [77]), des boues (voir *e.g.* [130], [35]), de la glace (voir *e.g.* [34], [81]), des avalanches et débris (voir *e.g.* [5], [91]), des laves (voir *e.g.* [146], [51]), etc. Nombre de ces écoulements sont décrits par le mouvement gravitaire d'une masse fluide et requièrent donc souvent la modélisation d'une surface libre mobile en temps (voir *e.g.* [4]). On aborde dans le chapitre 5 l'application de méthodes inverses aux écoulements de lave.



**Figure 2.2:** Représentation des différents comportements fluides dits viscoplastiques. Le comportement de type rhéofluidifiant à seuil est souvent dénommé fluide de Herschel-Bulkley (voir *e.g.* [76]). On représente également sur la figure le comportement d'un matériau plastique idéalisé. Ce comportement n'entre pas dans la catégorie des comportements fluides mais permet de mettre en avant le caractère intermédiaire du comportement rhéofluidifiant (ou pseudo plastique) entre un fluide newtonien et un solide parfaitement plastique.

**Loi de Glen** La loi de comportement la plus couramment utilisée pour la glace, appelée loi de Glen (d'après Glen [59]), est une loi de puissance standard. Elle est souvent présentée sous la forme inverse à la forme classique, *i.e.* en exprimant le taux de cisaillement en fonction de la cission efficace.

La glace isotrope est alors décrite par la loi suivante (cf. *e.g.* [36]) :

$$\dot{\gamma} = A\tau^n \quad (2.18)$$

qui équivaut, pour  $n > 0$ , à :

$$\tau = \dot{\gamma}^{\frac{1}{n}} A^{-\frac{1}{n}} \quad (2.19)$$

En prenant la norme de Frobenius de l'équation (2.6) et en utilisant la relation (2.19), on obtient :

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2} A^{-\frac{1}{n}} \dot{\gamma}^{\frac{1-n}{n}} = \sqrt{2}^{\frac{-1-n}{n}} A^{-\frac{1}{n}} \|\underline{\mathbf{D}}\|_F^{\frac{1-n}{n}} = \eta_0 \|\underline{\mathbf{D}}\|_F^{\frac{1-n}{n}} \quad (2.20)$$

La loi de comportement s'écrit alors :

$$\underline{S} = A^{\frac{-1}{n}} \dot{\gamma}^{\frac{1-n}{n}} \underline{D} = 2\eta_0 \|\underline{D}\|_F^{\frac{1-n}{n}} \underline{D} \quad (2.21)$$

Par analogie avec la formulation standard de la viscosité apparente pour des fluides en loi de puissance (2.15), on obtient :

$$\alpha = \frac{1}{n} \Leftrightarrow n = \frac{1}{\alpha}, \quad n > 0, \quad \alpha > 0$$

$$K = A^{\frac{-1}{n}} \Leftrightarrow A = K^{-n}$$

La viscosité  $\eta$  définie par (2.20) s'exprime classiquement en  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ . Le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  est homogène à une fréquence et s'exprime en  $\text{s}^{-1}$ . Il vient que la grandeur  $\eta_0$  s'exprime en  $\text{Pa} \cdot \text{s}^{\frac{1}{n}}$ . Elle représente la viscosité newtonienne ou *consistance* du fluide. La constante rhéologique  $A$  a également une dimension dépendante de l'exposant de la loi de puissance  $n$  et s'exprime donc en  $\text{Pa}^{-n} \cdot \text{s}^{-1}$ . Elle est appelée *fluidité*.

Les valeurs des paramètres  $A$  et  $n$  sont largement discutées car à priori dépendantes d'un certain nombre de facteurs, essentiellement la température. La valeur  $n = 3$  est communément admise pour le comportement de la glace bien que l'on puisse trouver dans la littérature des valeurs allant de 1.5 à 4.2 (voir *e.g.* [36]). La fluidité  $A$  présente une forte dépendance à la température et différents modèles existent pour la calculer. Nous présentons dans la section suivante une description classique basée sur une loi d'Arrhenius.

**Remarque 2 :** *bien que l'on considère la glace comme un matériau isotrope dans l'établissement de la loi de comportement, il est important de noter qu'il n'en est rien dans la réalité; en effet, la glace est un matériau polycristallin composé de cristaux orientés différemment et présentant une forte anisotropie. Il existe des modèles intégrant cette anisotropie dans le facteur  $A$ . Le traitement de l'anisotropie peut également intervenir dans le choix de la valeur de  $n$ . Quelques unes de ces lois plus "exotiques" peuvent être trouvées dans [119] (voir également [58]). Cette caractéristique ne sera pas considérée dans la suite de ce travail.*

## 2.4.2 Modélisation thermique

Le comportement visqueux de la glace est intrinsèquement lié à la température. Ce couplage avec la thermique est généralement introduit dans le paramètre  $A$  (voir équation (2.20)) à travers une loi d'Arrhenius évaluée pour une température  $T'$  dépendant de la température réelle  $T$  et de la pression  $p$ . On définit la température  $T'$  comme étant la température relative à la température au point de fusion  $T_m$ . Cette température au point de fusion dépend de la pression isotrope selon une relation de

Clausius-Clapeyron :  $T_m = T_0 - \beta p$  où la constante de Clausius-Clapeyron  $\beta$  vaut :  $\beta = 9,7456 \times 10^{-8} \text{ K} \cdot \text{Pa}^{-1}$  et où  $T_0 = 273.15 \text{ K}$ . On définit alors  $T'$  ainsi :

$$T' = T - T_m + T_0 = T + \beta p \quad (2.22)$$

La constante  $A$  s'obtient alors selon la loi d'Arrhenius :

$$A(T') = A_0 e^{-\frac{Q}{RT'}} \quad (2.23)$$

où  $A_0$  est la fluidité de référence à la température  $T_0$ ,  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  est la constante des gaz parfaits et  $Q$  représente l'énergie d'activation. En glaciologie, pour  $n = 3$ , on a pour les valeurs des constantes (cf. *e.g.* [69]) :

$$A_0 = \begin{cases} 3,985 \times 10^{-13} \text{ s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-3} & \text{si } T' \leq 263,15 \text{ K} \\ 1,916 \times 10^3 \text{ s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-3} & \text{si } T' > 263,15 \text{ K} \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} 60 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} & \text{si } T' \leq 263,15 \text{ K} \\ 139 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} & \text{si } T' > 263,15 \text{ K} \end{cases}$$

L'introduction d'une telle loi dans un modèle de glace induit la nécessité de connaître la température dans le fluide, soit par le biais de mesures (difficilement accessibles), soit par le biais de profils thermique génériques supposés à priori (voir *e.g.* [165] pour le calcul de profil de température) soit par le couplage du modèle fluide avec une équation de la chaleur. De plus, le bien fondé d'une complexification du modèle à travers cette paramétrisation dépend de la sensibilité du modèle à  $A_0$  qui, comme nous le verrons au chapitre 5, peut s'avérer relativement faible, faisant du couplage avec la thermique un phénomène moins essentiel qu'il n'y paraît pour la simulation numérique. La même question peut se poser pour un paramètre notoirement fondamental dans la modélisation des écoulements de glace : le glissement basal.

## 2.5 Modélisation du socle : revue des lois de glissement

La glace se déplace selon trois mécanismes : la déformation plastique, le glissement sur son socle rocheux et la déformation du socle lui-même. On peut regrouper les deux derniers phénomènes sous la dénomination de *mouvement basal*. Bien que le glissement et la déformation du socle puissent tout à fait se produire simultanément, on distingue la mécanique du glissement sur un socle *rigide* de celle sur un socle *déformable* ou souple. Cependant, même si les mécanismes à l'origine du mouvement basal sont différents, la problématique en termes de modélisation est identique et revient à la définition d'une *loi de glissement* c'est à dire une relation entre les vitesses basales, les contraintes de cisaillement et les caractéristiques physiques du socle que sont notamment la pression d'eau et la surface de contact avec l'eau sous-glaciaire, la topographie du socle et les propriétés du sédiment interfacial.

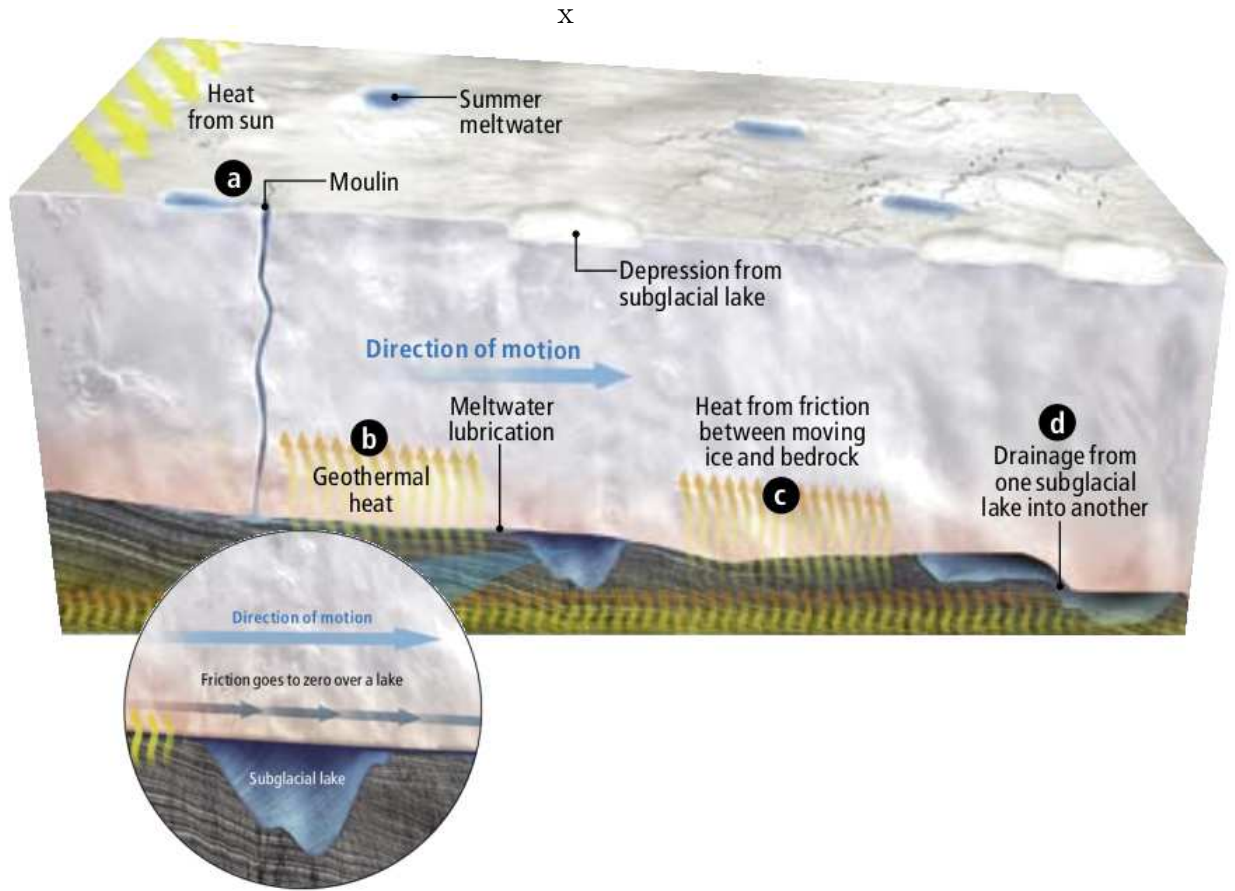
Les fluides visqueux sont supposés obéir à une condition de non-glissement sur une frontière solide, due à une adhérence des molécules à la frontière à l'échelle microscopique. Dans un contexte d'interface fine, mal ou pas représentée, entre le solide et le fluide visqueux, une relaxation de cette condition de non-glissement appelée condition de Navier, autorise une vitesse basale non nulle proportionnelle à la contrainte. Elle permet d'éviter l'apparition d'une singularité non physique (vitesse discontinue) (voir *e.g.* [43]).

### 2.5.1 Glissement sur un socle rigide : la théorie de Weertman

On s'intéresse principalement par la suite à la modélisation du glissement sur un socle rigide. Comme nous le verrons, dans un cadre assez général, la modélisation du mouvement basal sur un socle souple, bien que significativement plus complexe en termes de processus physiques mis en jeu que celui du glissement sur un socle rigide, amène à des lois de glissement tout à fait similaires et c'est au niveau de la paramétrisation que l'on distinguera foncièrement les processus.

La théorie fondatrice du glissement sur un socle rigide en glaciologie est celle introduite par Weertman [172] ; le problème est d'expliquer comment la glace, supposée à la température de fusion, franchit les obstacles du socle rocheux. L'analyse de Weertman, et par la suite l'observation, ont permis de conclure à deux phénomènes principalement actifs : le regel et le fluage étendu (*enhanced creep*). Le phénomène de regel provient d'un gradient de pression entre l'écoulement en amont de l'obstacle et celui en aval qui induit un gradient de température : la glace est plus froide en amont qu'en aval. Un transfert de chaleur se produit alors depuis l'aval vers l'amont, faisant fondre la glace amont qui s'écoule alors sous la forme d'eau liquide en suivant le gradient de pression puis regèle en aval de l'obstacle où la température de fusion est plus haute (car la pression est plus faible). Ce mécanisme ne fonctionne pas pour des obstacles de grande taille car dans ce cas le transfert de chaleur devient négligeable. Vient alors le phénomène de fluage étendu : la présence d'un obstacle dans l'écoulement produit un excès de contrainte qui accroît la déformation et permet à la glace de s'étirer et de se compresser pour dépasser ou contourner l'obstacle. Plus l'obstacle est grand, plus la zone affectée par l'excès de contrainte est grande. Ce mécanisme est donc d'autant plus effectif que la taille de l'obstacle est importante. Le développement de cette théorie fait entre autre l'hypothèse qu'un film d'eau liquide très mince (environ  $1\mu\text{m}$ ) sépare la glace de son socle rocheux imperméable en tout point. Ce film liquide provient du processus de fonte-regel lui-même, du flux géothermique et de la chaleur issue de la friction. Par ailleurs, de grandes quantités d'eau de surface issue de la fonte peuvent s'infiltrer jusqu'au socle (parfois appelé *effet Zwally*, voir [175]). Les différentes contributions à l'hydrologie glaciaire pour un écoulement de calotte polaire générique sont schématisées sur la figure 2.3.

Cette théorie et ses éventuelles améliorations amènent des lois de glissement de la forme :



**Figure 2.3:** Vue schématique des différents processus contributeurs à l’hydrologie glaciaire. Zoom sur le lac sous-glaciaire induisant une diminution très forte de la friction localement. La présence de lacs sous-glaciaires de grandes dimensions est connue pour être signée par une dépression très plane dans la topographie de surface. Cette caractéristique se retrouve dans la solution analytique de l’écoulement uniforme présentée en section 5.5 (voir également [24]). Avec la courtoisie de Kevin Hand, Scientific American, image adaptée de [15].

$$u_b = \alpha_1 \tau_b + \alpha_2 \tau_b^n$$

où le terme pondéré par  $\alpha_1$  représente le processus de regel : dans ce cas, le mouvement de la glace se faisant sous forme liquide, il est considéré newtonien. Le terme pondéré par  $\alpha_2$  modélise le mouvement par fluage et l’exposant  $n$  inclut donc le caractère non-newtonien de la déformation visqueuse de la glace. Les paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dépendent globalement de la rugosité du socle quantifiée par la hauteur et la surface des obstacles ainsi que de facteurs d’échelles indéterminés. Cette théorie présente une bonne validité pour le cas de glissements relativement lents (voir *e.g.* [36]). Les glissements rapides et les fluctuations à court terme (de l’ordre de la journée) observées dans les vitesses de surface ne peuvent être expliqués par les seuls phénomènes relevés précédemment. La principale limitation de l’analyse de

Weertman est l'hypothèse du film liquide d'épaisseur constante séparant le socle de la glace. Une description plus fine du glissement basal nécessite de tenir compte de la formation de cavités d'eau sous-glaciaires et plus largement de l'existence d'un réseau d'eau irrégulier reliant ces cavités.

**Le rôle de l'eau dans le glissement basal** L'eau sous forme liquide à la base des glaciers ne reste pas sous la forme d'un film lubrifiant uniforme mais se concentre dans des cavités où la pression est plus faible. Lorsque la quantité d'eau introduite est plus importante que la quantité drainée, le volume et la pression d'eau au niveau du socle augmentent. Les cavités sous-glaciaires s'élargissent alors et la surface de contact entre eau et glace augmente. De la même manière, la surface de contact entre la glace et la roche diminue. La contrainte se concentre alors sur les zones de contacts restantes, induisant une augmentation du glissement. Lliboutry [112] développe cette théorie et met en avant le fait que des vitesses de glissement supérieures à 20m/a ne peuvent être expliquées que par ce phénomène de cavitation (par opposition à la théorie initiale de Weertman). Cette analyse amène à considérer des lois de glissement de la forme suivante (en négligeant les effets dus au regel, très souvent négligés en pratique) :

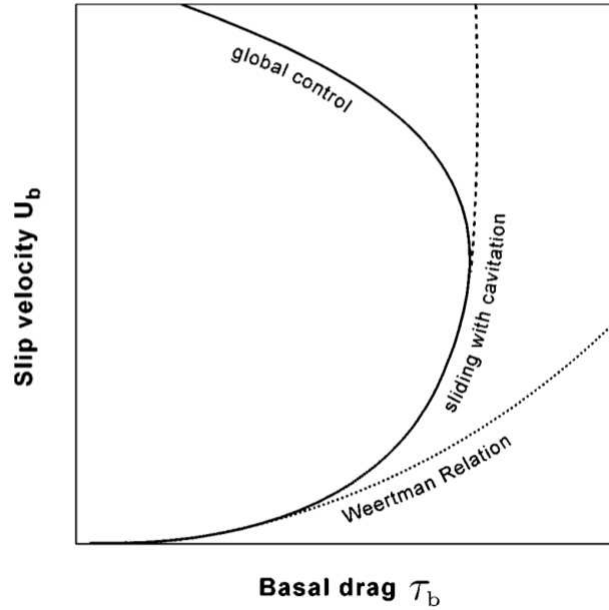
$$u_b = k\tau_b^p$$

avec  $p$  généralement pris égal à l'exposant de Glen,  $n$  et  $k$  étant dépendant des propriétés thermiques et mécaniques de la glace, de la rugosité du socle et de la *pression effective* (égale à la différence entre la pression "cryostatique" de la colonne de glace et la pression d'eau exercée par la cavité). Cette analyse amène à définir une valeur de pression critique appelée *pression de séparation* directement liée à la géométrie du socle à travers la pression normale en compression ressentie au socle ; lorsque la pression d'eau atteint cette valeur, la glace commence à se séparer du socle permettant la formation de cavités et la loi de glissement précédente s'applique.

Cependant, ce type de loi prévoit un accroissement de la vitesse basale inversement proportionnel à la pression effective et donc des vitesses basales qui tendent vers l'infini quand la pression d'eau tend vers la pression cryostatique. Cette observation amène à introduire la notion de glissement instable. Ce phénomène représente le fait qu'au delà d'une certaine pression critique appelée *pression de stabilité*, apparaissent des forces d'accélération non nulles dans le bilan des forces induisant notamment un éventuel glissement du matériau sur une pente locale positive (dans la direction aval). Cette pression de stabilité est bien inférieure à la pression cryostatique. Par suite, on peut dériver une borne supérieure pour le cisaillement basal  $\tau_b$  nommée *borne d'Iken* (voir [86]) :

$$\tau_b/N \leq \tan(\theta)$$

où  $N$  désigne la pression effective et  $\theta$  désigne la pente maximale positive entre le socle et la direction moyenne de l'écoulement. L'existence d'une telle borne implique



**Figure 2.4:** Vue schématique de l'évolution de la vitesse de glissement en fonction de la contrainte basale. Image adaptée de [36].

que les éventuelles contraintes basales excédant ( $N \tan(\theta)$ ) ne sont plus localement contrebalancées par le glissement et l'équilibre des forces est alors maintenu par les contraintes latérales à plus grandes échelles (voir [156]) : un écoulement plus rapide accroît les résistances dues au cisaillement latéral induisant une diminution des forces reprises par le socle. Le cisaillement basal va alors décroître. On parle d'un contrôle global de la vitesse de glissement. Par suite, on peut définir une loi de glissement incluant un *cut-off* lié à la vitesse de glissement limite.

**Les régimes de glissement** Les développements précédents amènent à dégager trois principaux régimes de glissement basal. Le premier décrit le glissement dans le cas où la pression d'eau est inférieure à la pression de séparation. Dans ce cas, la vitesse de glissement est uniquement déterminée par les processus de regel et de fluage étendu. Lorsque la pression d'eau dépasse la pression de séparation, les vitesses de glissement s'accroissent fortement avec l'augmentation de pression jusqu'à atteindre la deuxième pression critique. Le glissement devient instable localement et la vitesse de glissement basal est alors globalement limitée par les contraintes latérales de l'écoulement. On reprend la représentation schématique donnée dans [36] sur la figure 2.4 pour résumer ce processus.

Si l'on néglige le phénomène de contrôle global aux glissements très rapides et le phénomène de regel, la loi de glissement prend la forme générale :

$$\tau_b = \beta u_b^{1/m} \quad (2.24)$$



où le coefficient  $\beta$  est susceptible d'être paramétrisé par de nombreux éléments, mais inclura généralement la pression effective de manière à rendre compte de son rôle très faible dans le cas de faibles vitesses  $u_b$ .

### 2.5.2 Glissement sur un socle déformable

L'analyse précédente est faite dans le cadre d'un socle rocheux imperméable et indéformable. Les observations montrent qu'il est fréquent de rencontrer de la glace évoluant sur une couche interfaciale de sédiments jouant le rôle d'un lit déformable. Ainsi, le mouvement basal est alors la somme de deux processus que sont le glissement de la glace sur son substrat et la déformation du substrat sédimentaire lui-même. La présence de ce substrat n'est pas systématique à tous les écoulements de glace mais semble jouer un rôle important dans la dynamique des fleuves de glace des calottes polaires. La modélisation de ce sédiment sous-glaciaire est un problème très complexe, encore mal contraint, où des caractéristiques très variées, reliées au caractère plastique du sédiment, à sa granulométrie, à sa porosité, à sa rugosité et de nouveau à sa forte interaction avec l'hydrologie sous-glaciaire, doivent être prises en compte.

Cependant, aussi complexe soit-il, ce substrat se comporte globalement comme un solide parfaitement plastique. Il y a alors une force résiduelle associée à la contrainte seuil  $\tau_*$  issue de la déformation plastique. La valeur de ce seuil est logiquement dépendante de la force de compression qu'exerce la glace sur le sédiment. De nouveau, la présence d'une pression d'eau va permettre d'abaisser cette force de cohésion et donc le seuil de déclenchement du mouvement plastique. Par suite, une forme typique pour la loi de glissement rendant compte d'une variété de comportements assez large est la suivante (voir *e.g.* [36]) :

$$\tau_b = \tau_* (1 + \beta u_b^{1/p}) \quad (2.25)$$

où le paramètre  $\beta$  inclut des paramétrisations variées telles que celles citées plus haut. Ainsi, en négligeant la contribution de la déformation du substrat au mouvement basal, on retrouve une loi de glissement de la forme (2.24) obtenue pour le glissement sur un socle rigide.

**Mesures ponctuelles** Il existe de nombreuses méthodes permettant de mesurer les vitesses de glissement à la base d'un glacier. Elles consistent généralement en la réalisation d'observations dans des cavités sous-glaciaires auxquelles on accède depuis la surface par l'intermédiaire d'un forage (voir *e.g.* [52],[46]). Cependant, bien que ce type de mesures permettent d'améliorer la compréhension des phénomènes mis en jeu à la base d'un glacier, elles ne sont réalisables que localement et en quantités réduites. Une couverture à grande échelle de données de vitesses basales n'est pas envisageable par ce type de procédé et les mesures radars aéroportées ou satellites ne permettent pas d'accéder à cette information. Le glissement basal étant un des

processus fondamentaux régissant la dynamique de la glace à toutes les échelles, la simulation numérique prédictive (ou pronostique) est donc nécessairement soumise à l'utilisation de méthodes inverses réalisant l'identification du paramètre de friction (ou des paramètres sous-jacents le décrivant) par le biais d'observations de surface couvrant une zone importante comme celles des vitesses.

### 2.5.3 Bilan

Dans la suite de ce travail, c'est une loi de la forme (2.24), rendant compte d'une large gamme de processus de glissement, qui est utilisée au sein de la résolution du problème de Stokes pour contraindre les vitesses basales. Le paramètre  $\beta$  présent dans les lois (2.24) et (2.25) est considéré comme une fonction donnée de l'abscisse  $x$  (en  $2D$  vertical). Le socle est considéré comme imperméable et la loi de friction correspondante s'écrit finalement :

$$\begin{cases} |\tau_b|^{m-1} \tau_b = \beta u_b^\tau & (2.26) \\ u_b^n = 0 & (2.27) \end{cases}$$

où  $u_b = (u_b^\tau, u_b^n)$  décrit le vecteur des vitesses basales  $u_b$  dans le repère de la pente locale. Cette loi de friction est généralement nommée *loi de Weertman*. L'implémentation de cette loi en tant que condition limite pour le problème de Stokes est présentée en section 4.4.1.

Cette description générale du processus de glissement basal dans les glaciers met en avant la difficile question de la paramétrisation ; la modélisation est globalement complexe, fonction de nombreux processus physiques difficiles à quantifier et à mesurer. La définition d'une loi de friction s'appliquant à toute situation est manifestement inenvisageable sans intégrer une paramétrisation multiple, très lourde, dont l'ajustement serait pratiquement irréalisable. L'application de cette théorie à des écoulements réalistes requiert la connaissance des détails de la géométrie du socle rocheux ou de la rhéologie du sédiment sous-glaciaire ; informations qui ne sont généralement pas disponibles. De la même manière que l'on ne considère pas le détail minutieux des aspérités du lit d'une rivière ou bien la forme de l'écoulement autour des plantes aquatiques en hydraulique fluviale, la mesure de la friction doit être faite par l'ajustement d'une formule empirique à partir d'observations.

Ces considérations, également soulignées pour le problème de la modélisation thermique de la glace (voir section 2.4.2), appuient le rôle important qu'ont à jouer les méthodes inverses en glaciologie, non seulement à travers l'identification de paramètres, mais peut-être plus encore à travers les analyses de sensibilité préalables (voir sections 4.8, 6.3.2 et chapitre 5).

## 2.6 Modèle d'écoulement de fluide géophysique quasi-newtonien à surface libre

Les différentes caractéristiques physiques du fluide glace détaillées précédemment (rhéologie non-linéaire, dépendance à la thermique, glissement basal) se retrouvent dans la modélisation d'autres fluides comme les laves magmatiques ou les boues. Par ailleurs, le contexte d'écoulement gravitaire à surface libre sur une topographie s'applique à une gamme assez large d'écoulements géophysiques. On propose dans cette section un regroupement des différentes composantes du modèle glaciologique au sein d'un modèle d'écoulement plus général.

### 2.6.1 Le modèle d'écoulement

On modélise l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible, soumis à la gravité, dans un domaine mobile au cours du temps  $\Omega_t$ . La conservation de la quantité de mouvement est décrite par les équations de Navier-Stokes. La conservation de la masse est simplement décrite sous la forme d'une contrainte de divergence nulle sur les champs de vitesse admissibles. On obtient alors le système d'équations suivant :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \underline{\mathbf{S}} \quad (2.28)$$

$$\text{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_t \quad (2.29)$$

où  $\mathbf{u} = (u_x(x, z, t), u_z(x, z, t)) \forall (x, z) \in \Omega_t, t \in [0, T]$  désigne le vecteur vitesse dans le cas 2D vertical  $(x, z)$ ,  $\underline{\sigma}$  désigne le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $\mathbf{g}$  l'accélération de la pesanteur,  $p$  le champ de pression,  $\underline{\mathbf{S}}$  le tenseur des contraintes déviatoires et  $\Omega_t$  le domaine au temps  $t$ . La loi de comportement décrivant le comportement visqueux du fluide est une loi de puissance qui exprime les contraintes déviatoires en fonction des vitesses de déformation ainsi :

$$\underline{\mathbf{S}} = 2\eta_0 \|\underline{\mathbf{D}}\|_F^{\frac{1-n}{n}} \underline{\mathbf{D}}, \quad n > 0 \quad (2.30)$$

où  $\underline{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$  désigne le tenseur des vitesses de déformation,  $n$  l'exposant de la loi de puissance ( $n = 3$  pour la glace) et  $\eta_0$  la consistance du fluide (homogène à la viscosité newtonienne pour  $n = 1$ ). La norme matricielle de Frobenius  $\|\cdot\|_F$  est définie par (2.11).

L'évolution temporelle du domaine a lieu à travers le déplacement d'une frontière libre. Cette frontière, nommée  $\Gamma_s$ , est soumise à une condition de contrainte nulle. Elle représente typiquement la surface d'un écoulement gravitaire (*i.e.* l'interface fluide/air). Cette surface  $\Gamma_s$  est considérée comme étant le graphe d'une fonction  $h(x, t)$ . Son mouvement est décrit par l'équation de transport monodimensionnelle suivante :

$$\partial_t h + u_x \partial_x h = a + u_z \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (2.31)$$

où  $a$  est un terme source modélisant une variation de masse du domaine fluide. Dans un cadre glaciologique, ce terme représente l'accumulation de neige à la surface du glacier s'il est positif où la perte de masse par ablation estivale s'il est négatif.

La frontière du domaine  $\partial\Omega$  est divisée ainsi :

- $\Gamma_s$  désigne la surface supérieure (surface libre)
- $\Gamma_b$  désigne la frontière inférieure (socle rocheux)
- $\Gamma_l$  et  $\Gamma_r$  sont des frontières latérales ouvertes

On introduit  $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n})$ , le repère normale-tangente tel que :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} \quad (2.32)$$

avec :

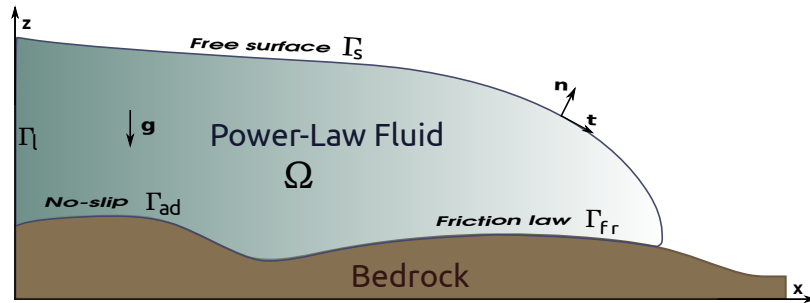
$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_{nn}\boldsymbol{n} + \sigma_{n\tau}\boldsymbol{\tau} \quad , \quad \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma_{\tau n}\boldsymbol{n} + \sigma_{\tau\tau}\boldsymbol{\tau} \quad (2.33)$$

La frontière  $\Gamma_b$  est divisée en deux sous-frontières  $\Gamma_{fr}$  et  $\Gamma_{ad}$  correspondant à une zone soumise à une contrainte d'adhérence ( $u_{\tau}|_{\Gamma_{ad}} = 0$  ,  $u_n|_{\Gamma_{ad}} = 0$ ) et une zone de friction (voir figure 2.5). On considère une loi de friction non-linéaire (voir section 2.5) sur  $\Gamma_{fr}$  :

$$\begin{cases} |\sigma_{n\tau}|^{m-1} \sigma_{n\tau} = \beta u_{\tau} \\ u_n^b = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

$$(2.35)$$

La surface  $\Gamma_s$  est soumise à une condition de contrainte nulle :  $-\underline{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{n}|_{\Gamma_s} = 0$ . La frontière latérale  $\Gamma_l$  est soumise à une condition limite de Neumann :  $-\underline{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{n}|_{\Gamma_l} = p_l$ . Le domaine typique est représenté sur la figure 2.5.



**Figure 2.5:** Géométrie d'un écoulement géophysique 2D vertical à surface libre avec un front sec sur un socle rocheux quelconque et notations.

L'utilisation principale de ce modèle d'écoulement dans la suite de ce travail est la modélisation glaciologique, bien que cette formulation générale soit applicable à de nombreux types d'écoulements géophysiques ne présentant pas de seuil dans

la loi de comportement. On peut citer notamment les écoulements de boue ou les avalanches de neige dense. L'exemple d'un écoulement de lave est proposé dans le chapitre 5.

### 2.6.2 Formulation du problème instationnaire

L'évolution de la frontière  $\Gamma_s$  est décrite par l'équation de transport (4.11) de la fonction  $h(x, t)$  associée à  $\Gamma_s$ . Afin de préserver la régularité du maillage, particulièrement à proximité de l'interface en évitant autant que possible le remaillage au cours du temps, on adopte une formulation ALE pour le traitement de la surface mobile.

**Formulation Arbitraire Lagrange Euler** On applique ici une formulation classique *Arbitraire Lagrange Euler* (ALE) pour la description du problème à frontière libre. Grossièrement, les méthodes ALE combinent les avantages des méthodes lagrangiennes et eulériennes en proposant un maillage mobile, suivant les mouvements de la surface libre, tout en conservant sa régularité. On s'appuie ici sur les développements de [162] et [41].

Une méthode de type eulérienne-Volume Of Fluide tolérant des changements de topologie pour la simulation des glaciers est développée dans [96] et appliquée au problème de Stokes dans [97].

La méthode ALE peut se décrire ainsi : on définit une configuration de référence  $\hat{\Omega}_\tau$  au temps de référence  $\tau$  et on suppose l'existence d'un changement de variable bijectif  $\hat{C}_t$  du domaine de référence au domaine courant  $\Omega_t$ . On pose :

$$\begin{aligned} \hat{C}_\tau : \hat{\Omega}_\tau \times [\tau, T] &\longrightarrow \Omega_t \\ (\hat{\mathbf{X}}_\tau, t) &\longmapsto \mathbf{X}_t = \hat{C}_\tau(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t) \end{aligned} \quad (2.36)$$

où  $\hat{C}$  définit une correspondance univoque entre  $\hat{\Omega}_\tau$  et  $\Omega_t$  soit :

$$\Omega_t = \{\hat{C}_\tau(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t), \hat{\mathbf{X}}_\tau \in \hat{\Omega}_\tau\} \quad (2.37)$$

La quantité  $\hat{\mathbf{X}}_\tau \in \hat{\Omega}_\tau$  représente les coordonnées dans l'espace ALE et  $\mathbf{X}_t \in \Omega_t$  les coordonnées eulériennes. Cette correspondance nous permet de définir l'application suivante :

$$\mathcal{X}(\mathbf{X}_s, s; t) = \hat{C}_\tau \circ \hat{C}_\tau^{-1}(\mathbf{X}_s, s; t) = \hat{C}_\tau(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t) = \mathbf{X}_t \quad (2.38)$$

Pour un  $\mathbf{X}$  donné,  $\mathcal{X}$  représente, au temps  $t$ , la position du point qui était en  $\mathbf{X}$  au temps  $s$ . Il vient que le graphe de  $\mathcal{X}$  pour tous les temps  $t$  représente la trajectoire du point dans le domaine réel, appelée *courbe caractéristique*.

Vu de l'espace physique  $\Omega_t \times [0, T]$ , un point de l'espace ALE a une vitesse  $\gamma(\mathbf{X}_t, t)$ ,  $(\mathbf{X}_t, t) \in \Omega_t \times [0, T]$ . Ainsi la vitesse instantané  $\gamma$  du domaine  $\Omega_t$  (ou *vitesse de grille*) est la dérivée temporelle de la trajectoire  $\mathcal{X}(\mathbf{X}_s, s; t)$  :

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t}(\mathbf{X}_s, s; t) = \gamma(\mathcal{X}(\mathbf{X}_s, s; t), t) \quad (2.39)$$

D'après (2.38), on en déduit :

$$\frac{\hat{C}_\tau(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t) - \hat{C}_\tau(\hat{\mathbf{X}}_\tau, \tau)}{t - \tau} = \gamma(\hat{\mathbf{X}}_\tau, \tau) + O(t - \tau) \quad (2.40)$$

De cette expression, on déduit facilement une approximation affine de  $\hat{\Omega}_\tau$  dénotée  $\hat{F}_\tau$  tel que :

$$\hat{F}_\tau(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t) = \hat{\mathbf{X}}_\tau + (t - \tau)\gamma(\hat{\mathbf{X}}_\tau, \tau) \quad (2.41)$$

Cette vitesse de grille  $\gamma$  est *arbitrairement choisie* et ne dépend, au premier ordre, que de la vitesse au temps  $\tau$ , comme le montre (2.41). La seule contrainte est donc de respecter des conditions de compatibilité entre la vitesse du fluide et celle du domaine au niveau de la frontière  $\partial\Omega_\tau$  (comme l'égalité des vitesses normales). Pour les points intérieurs, le but est de préserver la régularité du maillage en choisissant un champ de vitesse suffisamment régulier et simple à obtenir. Une méthode classique et efficace dans le cas de déformations importantes comme le suivi de front est de déformer le maillage selon un modèle d'élasticité linéaire. Pour des mouvements strictement verticaux, une déformation par homothétie de type ALES (voir [38]) est suffisante.

On définit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_t, t) = \mathbf{u}(\hat{C}(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t)) = \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t) \quad (2.42)$$

En remplaçant  $\hat{C}$  par son approximation au premier ordre  $\hat{F}$ , on obtient :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_t, t) = \mathbf{u}(\hat{F}_\tau(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t), t) = \mathbf{u}(\hat{\mathbf{X}}_\tau + (t - \tau)\gamma(\hat{\mathbf{X}}_\tau, \tau), t) \quad (2.43)$$

On peut alors obtenir l'expression des dérivés spatiales et temporelle de  $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t)$ . La formule de la chaîne appliquée à la dérivée spatiale sur  $\hat{\mathbf{u}}$  donne :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t)}{\partial \hat{\mathbf{X}}_\tau} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}_t, t)}{\partial \mathbf{X}_t} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{X}}_\tau} \left( \hat{\mathbf{X}}_\tau + (t - \tau)\gamma(\hat{\mathbf{X}}_\tau, \tau) \right) \quad (2.44)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}_t, t)}{\partial \mathbf{X}_t} \left( \mathbf{Id} + (t - \tau) \frac{\partial \gamma(\hat{\mathbf{X}}_\tau, \tau)}{\partial \hat{\mathbf{X}}_\tau} \right) \quad (2.45)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}_t, t)}{\partial \mathbf{X}_t} + o(t - \tau) \quad (2.46)$$

ce qui montre que les dérivés spatiales sont identiques au première ordre. La formule de la chaîne appliquée à la dérivée temporelle sur  $\hat{\mathbf{u}}$  donne :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}_t, t)}{\partial t} + \gamma(\hat{\mathbf{X}}_\tau, \tau) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}_t, t) \quad (2.47)$$

ce qui, d'après (2.46) et (2.47), équivaut à :

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}_t, t)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t)}{\partial t} - \gamma(\hat{\mathbf{X}}_\tau, \tau) \nabla \hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t) \quad (2.48)$$

On pose :

$$p(\mathbf{X}_t) = p(\hat{C}(\hat{\mathbf{X}}, t)) = \hat{p}(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t) \quad (2.49)$$

$$\gamma(\mathbf{X}_t) = \gamma(\hat{C}(\hat{\mathbf{X}}, t)) = \hat{\gamma}(\hat{\mathbf{X}}_\tau, t) \quad (2.50)$$

Par suite, l'application du changement de variable au problème (2.28)-(2.29) donne :

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + ((\hat{\mathbf{u}} - \hat{\gamma}) \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} \right) = \rho f + \nabla \hat{p} - \mathbf{div}(\hat{\mathbf{S}}) & \text{dans } \hat{\Omega}_\tau \times [\tau, T] \\ \mathbf{div}(\hat{\mathbf{u}}) = 0 & \text{dans } \hat{\Omega}_\tau \times [\tau, T] \end{cases} \quad (2.51)$$

On formule alors l'hypothèse de Stokes éminemment valide pour les écoulements de glace (voir tableau 1.1) : pour des écoulements à bas Reynolds, les forces advectives sont faibles devant les forces visqueuses et on peut considérer l'approximation de Stokes et négliger le terme d'advection dans l'équation des moments. De plus, dans notre contexte, le faible nombre de Reynolds est associé à un écoulement présentant des vitesses basses variant sur des temps grands. On fait alors l'hypothèse *quasi-statique* en négligeant le terme d'accélération.

Sous cette hypothèse, on obtient finalement le *problème de Stokes incompressible quasi-statique à surface libre* :

Soit  $\hat{\gamma}$  donnée, trouver  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p})$  tel que :

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = f \\ \mathbf{div}(\hat{\mathbf{u}}) = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \hat{\Omega}_\tau \times [\tau, T] \quad (2.52)$$

$$\partial_t h + u_x \partial_x h = a + u_z \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (2.53)$$

L'équation de surface libre (2.53) est une équation de transport hyperbolique monodimensionnelle. Dans le cas présent, on la résout par la méthode des caractéristiques. L'utilisation d'une méthode des caractéristiques pour la résolution d'une formulation ALE dans le cadre d'une formulation Galerkin est introduite par Pironneau et al. [136] et reprise par Maury [122]. Le domaine de référence au temps  $t^n$  sera systématiquement pris égal au domaine au temps précédent fournissant une correspondance univoque entre les discrétisations des deux domaines. L'algorithme de résolution du transport de la surface libre se présente alors comme suit (voir *e.g.* [125]) :

À chaque pas de temps  $t^n$ , étant donnés  $\Omega^n = \Omega(t^n)$  et  $(u^n, p^n)$

1. On calcule la nouvelle position de la surface libre  $h^{n+1}$  par la méthode des caractéristiques puis la vitesse de grille  $\gamma^{n+1}$ , par exemple en résolvant un problème d'élasticité linéaire. On peut alors définir la transformation (2.38) qui est la linéarisation de la correspondance univoque entre  $\Omega^n$  et  $\Omega^{n+1}$ .
2. On calcule la nouvelle solution  $(\hat{u}^{n+1}, \hat{p}^{n+1})$  sur le domaine de référence  $\hat{\Omega} = \Omega^n$ .
3. On met à jour le domaine de calcul  $\Omega^{n+1} = \gamma^{n+1}(\Omega^n)$  (transport du maillage à la vitesse  $\gamma^{n+1}$ ).
4. On obtient la nouvelle solution  $(u^{n+1}, p^{n+1})$  dans  $\Omega^{n+1}$  en posant :  $u^{n+1}|_{\Omega^{n+1}} = \hat{u}^{n+1}|_{\Omega^n}$  et  $p^{n+1}|_{\Omega^{n+1}} = \hat{p}^{n+1}|_{\Omega^n}$ .





# Problème inverse - Approche variationnelle

---

3.1	LA MÉTHODE DE L'ÉTAT ADJOINT . . . . .	46
3.1.1	<i>Position du problème</i> . . . . .	46
3.1.2	<i>Fonction coût</i> . . . . .	47
3.1.3	<i>Modèle linéaire tangent</i> . . . . .	47
3.1.4	<i>Modèle adjoint</i> . . . . .	48
3.1.5	<i>Analyse de sensibilité locale</i> . . . . .	49
3.2	L'ASSIMILATION VARIATIONNELLE DE DONNÉES . . . . .	50
3.2.1	<i>Problème de contrôle</i> . . . . .	51
3.2.2	<i>Système d'optimalité</i> . . . . .	51
3.2.3	<i>Méthodes locales et régularisation</i> . . . . .	52
3.3	IMPLÉMENTATION DU MODÈLE ADJOINT . . . . .	56
3.3.1	<i>Les différentes stratégies</i> . . . . .	56
3.3.2	<i>Différentiation automatique</i> . . . . .	56
3.3.3	<i>Résumé de l'algorithme</i> . . . . .	60
3.4	UTILISATION ET RÔLE DES MÉTHODES INVERSES EN GLACIOLOGIE . . . . .	61
3.4.1	<i>Les données en glaciologie</i> . . . . .	61
3.4.2	<i>Des données au modèle et du modèle aux données</i> . . . . .	66
3.5	LE LOGICIEL DASSFLOW-ICE . . . . .	68
3.5.1	<i>Structure du code de calcul</i> . . . . .	68
3.5.2	<i>Une première étude : le glacier Variegated</i> . . . . .	69

---

On décrit dans ce chapitre l'approche variationnelle de modélisation inverse considérée dans ce travail. Une description générale du modèle adjoint associé à un problème elliptique non-linéaire est faite suivi de l'introduction des outils d'analyse de sensibilité et d'assimilation de données dans un contexte de contrôle optimal. Le rôle majeur des données et observations est mis en avant et une revue des méthodes d'observations de la cryosphère est faite. On termine par une présentation synthétique du logiciel *DassFlow-Ice* illustrée par une première étude menée sur le glacier Variegated.

### 3.1 La méthode de l'état adjoint

L'approche variationnelle pour la recherche de solutions à un problème d'équations aux dérivées partielles consiste globalement à la formulation d'un problème équivalent d'optimisation dans des espaces fonctionnels donnés. Le formalisme mathématique s'appuie principalement sur l'analyse fonctionnelle et le calcul différentiel. Ce formalisme est souvent enrichi par des disciplines connexes comme l'analyse convexe ou la théorie du contrôle optimal. Les domaines applicatifs sont nombreux et variés parmi lesquels figure la géophysique au sens large (océanographie, météorologie, vulcanologie, glaciologie, etc.).

#### 3.1.1 Position du problème

On s'intéresse dans cette partie à la dérivation générale du modèle adjoint d'un problème formulé par des équations d'évolution continues. Dans le cadre du problème de Stokes quasi-statique (2.52) considéré dans ce travail, on se bornera à la présentation générale de la méthode de l'adjoint et du problème de contrôle optimal au premier ordre associé à un problème elliptique (donc à géométrie fixée), non nécessairement linéaire. Le formalisme présenté s'inspire principalement de celui introduit par Lions [111].

Soit  $V$  un espace de Hilbert réel. On note  $V'$  le dual de  $V$ . On considère un système gouverné par un opérateur  $M$  et décrit par la variable d'état  $x \in V$  solution de :

$$M(x(\mathbf{k}); \mathbf{k}) = f(\mathbf{k}), \quad x(\mathbf{k}) \in V \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{k} \in P$  avec  $\mathbf{k}$  le vecteur représentant les paramètres du modèle et  $P$  un espace de Hilbert appelé *espace des contrôles*. Le modèle  $M : V \times P \longrightarrow V'$  est un opérateur aux dérivées partielles elliptique, à priori non-linéaire par rapport à  $x$  et  $\mathbf{k}$ , et  $f$  est défini de  $P$  dans  $V'$ . On suppose par la suite que le problème est bien posé au sens où  $x(\mathbf{k})$  est uniquement déterminé par l'équation (3.1) et varie continûment par rapport à  $\mathbf{k}$ .

Dans un contexte de contrôle optimal,  $\mathbf{k}$  représente une commande sur laquelle on souhaite agir pour contrôler le système à travers son état  $x(\mathbf{k})$ . On le nomme *vecteur de contrôle* et les paramètres du modèle le composant sont appelés *variables de contrôle*. Étant donnée une observation partielle de l'état du système  $x^* = x(\mathbf{k}^*)$ , on définit dans ce contexte une *équation d'observation* :  $u(\mathbf{k}^*) = C(x(\mathbf{k}^*))$  où  $C$ , défini de  $V$  dans  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, est appelé *opérateur d'observation*.

### 3.1.2 Fonction coût

Dans un objectif d'analyse (pour un  $\mathbf{k}$  donné) ou d'optimisation (détermination d'un "meilleur"  $\mathbf{k}$ ) du système physique, on définit une réponse du système sous la forme d'une fonction objectif  $j : V \times P \rightarrow \mathbb{R}$  qui associe à tout contrôle  $\mathbf{k} \in P$  un coût. En présence d'observations  $u^{obs}$ , un exemple type de fonction coût est :

$$j(\mathbf{k}) = J(\mathbf{k}; x^{\mathbf{k}}) = \frac{1}{2} \|C(x(\mathbf{k})) - u^{obs}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2} \langle N\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle_P, \quad u^{obs} \in \mathcal{H} \quad (3.2)$$

où  $x^{\mathbf{k}}$  désigne l'unique solution de (3.1). Ce coût est une quantité dépendante de l'état du système (et donc intrinsèquement du modèle), des paramètres et d'observations distribuées sur  $\Omega$ . On appelle cette fonctionnelle la *fonction coût*. L'opérateur  $N$  est supposé symétrique, défini, positif et définit une norme. Le premier terme mesure l'écart entre une valeur objectif et la solution calculée dans l'espace des observations  $\mathcal{H}$ . Nous renvoyons au cours en ligne [124] et également à [82] pour une dérivation détaillée de l'ensemble de la chaîne (des équations continues à l'implémentation) sur la base d'un modèle de Saint-Venant.

### 3.1.3 Modèle linéaire tangent

On s'intéresse alors au calcul du gradient de cette fonction coût  $j$  par rapport aux variables de contrôle  $\mathbf{k}$  afin d'étudier la réponse locale du système autour de valeurs nominales des paramètres. On définit pour cela la dérivée directionnelle de  $j$  par rapport à  $\mathbf{k}$  dans la direction  $\delta\mathbf{k}$  ainsi :

$$dj(\mathbf{k}; \delta\mathbf{k}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{j(\mathbf{k} + \lambda\delta\mathbf{k}) - j(\mathbf{k})}{\lambda} = \left( \frac{d}{d\lambda} j(\mathbf{k} + \lambda\delta\mathbf{k}) \right) \Big|_{\lambda=0} \quad (3.3)$$

S'il existe  $\frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k})$  tel que pour tout  $\delta\mathbf{k}$ ,  $dj(\mathbf{k}; \delta\mathbf{k}) = \left\langle \frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}), \delta\mathbf{k} \right\rangle$  alors  $j$  est Gâteaux-différentiable et on appelle  $\frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k})$  la différentielle de Gâteaux de  $j$  en  $\mathbf{k}$ . Une fonctionnelle Fréchet-différentiable est Gâteaux-différentiable dans toutes les directions. Soit  $\mathbf{k}_0 \in P$ , pour tout  $\delta\mathbf{k} \in P$ , on a :

$$\frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}_0) \cdot \delta\mathbf{k} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}_0; x) \cdot \delta\mathbf{k} + \frac{\partial J}{\partial x}(\mathbf{k}_0; x) \cdot w^{\mathbf{k}} \quad (3.4)$$

avec  $w^{\mathbf{k}} = \frac{dx}{d\mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{k}$ . On voit ainsi apparaître  $w^{\mathbf{k}}$  la dérivée de Gâteaux de l'état du système  $x^{\mathbf{k}}$  par rapport aux variables de contrôle  $\mathbf{k}$ , solution du modèle linéarisé ou *linéaire tangent* obtenu lorsqu'on applique la dérivée de Gâteaux au système (3.1) :

$$\frac{\partial M}{\partial x}(\mathbf{k}; x^{\mathbf{k}}) \cdot w = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) - \frac{\partial M}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}; x^{\mathbf{k}}) \cdot \delta\mathbf{k} \quad (3.5)$$

La résolution de ce problème pour un  $\delta \mathbf{k}$  donné fournit un gradient de l'état  $w$  par rapport au contrôle  $\mathbf{k}$  qui lui est associé. L'obtention de  $w$  suppose que le modèle linéaire tangent (3.5) est bien posé et que la fonction coût (3.2) est Gâteaux-différentiable. Le théorème des fonctions implicites fournit, pour le cas d'un problème linéaire tangent bien posé et d'opérateurs  $A$  et  $f$  de régularité  $C^1$ , la différentiabilité de l'état  $x$  par rapport au contrôle  $\mathbf{k}$ .

En dimension finie, pour  $\dim(P) = m$ , l'obtention de l'ensemble des composantes du gradient de la fonction coût  $dj$  pour chacune des directions de l'espace demande donc  $m$  résolutions du modèle linéaire tangent.

### 3.1.4 Modèle adjoint

Pour obtenir une expression des dérivées partielles de la fonction coût indépendamment de la direction de perturbation  $\delta \mathbf{k}$ , on tâche d'éliminer  $w$  de son expression en exhibant une dépendance linéaire de  $dj$  par rapport à  $\delta \mathbf{k}$ . On introduit pour cela la variable d'état adjointe  $\tilde{x} \in V$  et on écrit le produit de dualité de l'équation (3.5) avec  $\tilde{x}$ . On obtient :

$$\left\langle \frac{\partial M}{\partial x} \cdot w, \tilde{x} \right\rangle_{V' \times V} + \left\langle \frac{\partial M}{\partial \mathbf{k}} \cdot \delta \mathbf{k}, \tilde{x} \right\rangle_{V' \times V} = 0 \quad (3.6)$$

On transforme cette équation en faisant apparaître les opérateurs adjoints :

$$\left\langle \left[ \frac{\partial M}{\partial x} \right]^* \tilde{x}, w \right\rangle_{V \times V'} + \left\langle \left[ \frac{\partial M}{\partial \mathbf{k}} \right]^* \tilde{x}, \delta \mathbf{k} \right\rangle_{P' \times P} = 0 \quad (3.7)$$

où  $\tilde{x}$  est solution du *problème adjoint* suivant :

$$\left[ \frac{\partial M}{\partial x} \right]^* \tilde{x} = \frac{\partial J}{\partial x}(\mathbf{k}_0; x) \quad (3.8)$$

L'équation (3.7) présente une structure similaire à celle de l'expression (3.4). En combinant les équations (3.4), (3.7) et (3.8), on parvient finalement à exhiber une dépendance linéaire de la dérivée directionnelle  $dj$  par rapport au vecteur de perturbation  $\delta \mathbf{k}$ . En effet, on a :

$$dj = \left\langle \left[ \frac{\partial M}{\partial x} \right]^* \tilde{x}, w \right\rangle_{V' \times V} + \left\langle \frac{\partial J}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}_0; x), \delta \mathbf{k} \right\rangle_{P' \times P} \quad (3.9)$$

$$= \left\langle \frac{\partial J}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}_0; x), \delta \mathbf{k} \right\rangle_{P' \times P} - \left\langle \left[ \frac{\partial M}{\partial \mathbf{k}} \right]^* \tilde{x}, \delta \mathbf{k} \right\rangle_{P' \times P} \quad (3.10)$$

$$= \left\langle \frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}), \delta \mathbf{k} \right\rangle \text{ par définition} \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

On obtient finalement l'expression de la Gâteaux-différentielle de la fonction coût  $j$  pour toute direction de dérivation  $\delta \mathbf{k}$  en fonction de l'opérateur adjoint :

$$\frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}_0; x) - \left[ \frac{\partial M}{\partial \mathbf{k}} \right]^* \tilde{x} \quad (3.13)$$

Le calcul du gradient ne nécessite plus le calcul de  $w$  mais celui de  $\tilde{x}$  la variable adjointe solution de l'équation (3.8). Ce système présente l'avantage d'être de complexité similaire au système direct et sa dépendance au choix particulier de la fonction objectif n'existe qu'à travers le second membre.

Pour résumer la démarche, il faut dans un premier temps résoudre le problème direct (3.1) afin d'obtenir l'état du modèle direct  $x$ . Il faut ensuite résoudre le problème adjoint (3.8) pour obtenir l'état  $\tilde{x}$  du modèle adjoint. La connaissance de ces deux états permet finalement le calcul du gradient par la formule (3.13) indépendamment de  $\delta \mathbf{k}$ .

### 3.1.5 Analyse de sensibilité locale

L'utilisation des fonctions adjointes pour l'analyse de sensibilité remonte à Wigner [173], prix Nobel de physique et l'un des initiateurs du projet Manhattan pour le développement de la bombe atomique. Sur la même thématique, le potentiel de l'analyse de sensibilité pour de nombreux problèmes liés aux réacteurs nucléaires est démontré par [68]. Par la suite, cette méthode a connu un intérêt grandissant et est utilisée aujourd'hui dans de nombreux domaines, notamment la modélisation de fluides géophysiques (voir *e.g.* [106]) dont l'une des particularités est l'impossibilité de reproduire une situation donnée : un épisode géophysique est unique.

Ainsi, quelle que soit la qualité d'un modèle, la prédiction ne peut être réalisée par ce seul modèle. D'autre part, des données, aussi précises soient-elles, ne peuvent suffire à faire une prédiction. L'essence de l'utilisation de méthodes variationnelles inverses, et en premier lieu de l'analyse de sensibilité, est donc la réalisation d'un couplage entre le modèle et les données et l'utilisation de méthodes prenant en compte simultanément les informations issues du modèle et des données.

Le couplage entre modèle et observations représente la mesure, au sens d'une certaine norme, de l'écart entre l'état modélisé du système et l'état "vrai" (observé) du système. Dans le cadre développé précédemment, cet écart est décrit à travers la fonction coût. La méthode de l'état adjoint permet quant à elle de quantifier localement (au sens du développement de Taylor autour d'un point donné) la réponse de ce couplage relativement à toute perturbation des paramètres de contrôle. Le choix de la norme dans le calcul du coût est important car il permet d'introduire des informations a priori sur la fiabilité des observations (notamment à travers les

matrices de covariance d'erreurs, voir *e.g.* [29]).

Dans un cadre déterministe, la première description détaillée de cette méthode basée sur le formalisme général de la dérivée de Gâteaux pour des modèles non-linéaires est faite par Cacuci [27].

Le calcul des sensibilités locales est un outil puissant pouvant contribuer notamment aux objectifs suivants :

- améliorer la compréhension du système en déterminant les paramètres importants,
- écarter les données moins importantes et donc réduire la surparamétrisation,
- quantifier la réponse du système à une variation de ses paramètres.

Ces différents aspects induisent de manière plus générale une capacité pour l'utilisateur à mieux cibler les améliorations nécessaires à apporter à son modèle et/ou à ses données.

Les deux premiers aspects nécessitent de pouvoir comparer l'influence relative de chacun des paramètres. Pour cela, il est nécessaire de s'affranchir de la dimension et de l'ordre de grandeur des variables considérées. La méthode de normalisation la plus classique consiste, dans le cas du calcul du gradient de  $j$  autour d'un point  $\bar{\mathbf{k}}$ , à définir la sensibilité  $s_{\mathbf{k}}$  ainsi :  $s_{\mathbf{k}} = \frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}} \frac{\bar{\mathbf{k}}}{\bar{j}}$  où  $\bar{j}$  désigne la valeur du coût pour  $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$ .

Le troisième point est la caractéristique principale de l'obtention du gradient par la méthode adjointe ; le signe et l'amplitude du gradient local permettent de déterminer dans quel sens et avec quelle intensité les variables de contrôle doivent être modifiées pour rapprocher l'état calculé du système des observations. Cet aspect est le fondement de la formulation du problème de contrôle optimal et par conséquent de l'assimilation variationnelle de données par la méthode adjointe.

## 3.2 L'assimilation variationnelle de données

Bien que le gradient associé à la fonction coût, calculable pour toute perturbation grâce à la méthode de l'état adjoint, donne à lui seul accès à l'outil d'analyse de sensibilité pour un coût de calcul réduit, l'introduction des équations adjointes dans la théorie de Lions [111] a pour principal objet le contrôle optimal d'un système d'équations aux dérivées partielles. Le gradient obtenu par la méthode adjointe n'est que l'outil permettant de contrôler le système.

### 3.2.1 Problème de contrôle

À partir de la définition de la fonction coût (3.2), qui associe à tout contrôle  $\mathbf{k} \in P$  une valeur scalaire  $j(\mathbf{k})$ , on définit le problème de contrôle ainsi :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{k}^* \text{ tel que :} \\ j(\mathbf{k}^*) = \inf_{\mathbf{k} \in P_{ad}} j(\mathbf{k}) \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $P_{ad}$  désigne un sous-ensemble convexe fermé de  $P$ . D'après la définition de la fonction coût (3.2), on comprend bien que le problème de contrôle a pour objet l'identification d'un  $\mathbf{k}$  offrant le plus faible écart entre l'état calculé du système  $x(\mathbf{k})$  et un état observé  $u^{obs}$  au sens d'une certaine norme, dans un espace de valeurs admissibles pour  $\mathbf{k}$  circonscrit par l'opérateur  $N$ . Ce problème est un problème d'optimisation variationnelle consistant en la recherche d'un point critique d'une fonctionnelle. L'appellation de problème inverse prend alors tout son sens : contrairement au problème direct qui consiste à calculer l'état du système à partir d'un ensemble de paramètres  $\mathbf{k}$ , le problème de contrôle a pour objet la détermination de tout ou partie de  $\mathbf{k}$  à partir d'un état du système.

Dans le cas d'une fonctionnelle linéaire quadratique, on a existence et unicité du minimum associé au problème de contrôle optimal (voir *e.g.* [111, 124]) à partir de la convergence de suites minimisantes. Dans le cas général d'un problème non-linéaire défini sur des espaces de Banach, l'existence d'un contrôle optimal ou d'un ensemble de contrôles optimaux pour le problème (3.14) n'est pas un problème trivial et doit être démontré dans chaque cas. Ce problème, appelé *contrôlabilité*, ne sera pas traité dans ce travail, et l'on supposera toujours par la suite l'existence d'un contrôle optimal au sens requis (*i.e.* contrôle frontière, contrôle spatialement distribué, ...). À notre connaissance, l'analyse du problème de contrôle dans le cadre des équations de Stokes pour les fluides en loi de puissance n'est traitée que dans [48] et [108] à surface fixée. L'existence d'une solution au problème de contrôle optimal pour des contrôles de type contrôle frontière Dirichlet ou flux imposés est démontrée dans le cas continu. La solvabilité du problème adjoint est démontrée pour le problème discrétisé par éléments finis.

### 3.2.2 Système d'optimalité

La résolution du problème de contrôle (3.14) requiert l'évaluation de la fonction coût (3.2) sous la contrainte que  $x(\mathbf{k})$  soit solution du problème direct. Une condition nécessaire d'optimalité au premier ordre pour le problème de minimisation est l'annulation du gradient de la fonctionnelle soit :  $\frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) = 0$ . D'après l'équation (3.13), cela revient à :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}_0; x) - \left[ \frac{\partial M}{\partial \mathbf{k}} \right]^* \tilde{x} = 0 \quad (3.15)$$



Satisfaire cette condition d'optimalité sous la contrainte que  $x$  soit solution du problème direct et  $\tilde{x}$  solution du problème adjoint amène à écrire le *système d'optimalité* qui doit être vérifié :

$$\left\{ \begin{array}{ll} M(x(\mathbf{k}); \mathbf{k}) = f(\mathbf{k}), \quad x(\mathbf{k}) \in V & \text{(Problème direct)} \\ \left[ \frac{\partial M}{\partial x} \right]^* \tilde{x} = \frac{\partial J}{\partial x}(\mathbf{k}_0; x) & \text{(Problème adjoint)} \\ \frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}_0; x) - \left[ \frac{\partial M}{\partial \mathbf{k}} \right]^* \tilde{x} = 0 & \text{(Condition d'optimalité)} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

**Remarque 3** *Le problème de contrôle est un problème de minimisation de la fonction coût (3.2) sous la contrainte que l'état  $x$  soit solution du problème (3.1). Ainsi, une fonctionnelle de type lagrangien réalisant la somme de la fonction coût et de la forme faible de l'équation (3.1) peut être introduite. Dans ce cas, l'état adjoint  $\tilde{x}$  s'identifie au multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte modèle. Ce parallèle permet de déduire une autre méthode d'obtention du problème adjoint par l'application de conditions nécessaires d'optimalité au premier ordre sur le lagrangien soit l'annulation de ses dérivées relativement au contrôle  $\mathbf{k}$  et à l'état  $x$ . Pour plus de détails, on renvoie à [2] ou bien [124].*

### 3.2.3 Méthodes locales et régularisation

L'identification ou reconstruction de paramètres, aussi appelée calibration de modèle, s'applique aussi bien à des paramètres spatialement distribués sur le domaine  $\Omega$  qu'à des paramètres localisés sur les frontières du domaine. Elle repose nécessairement sur une méthode d'optimisation. En assimilation de données on distingue généralement deux types d'approches : l'approche stochastique (non traitée ici) basée sur des méthodes d'estimations bayésiennes et de filtrage, et l'approche variationnelle ou déterministe. Par ailleurs, il est classique de distinguer en optimisation les approches globales (recherche de l'optimum sur tout l'espace des paramètres) et les approches locales (recherche d'un extremum dans un voisinage du point de départ).

La première difficulté dans la recherche d'un extremum global provient du nombre de minima locaux qui croît généralement exponentiellement avec la taille et la complexité du problème; la deuxième étant la faculté à déterminer si un extremum local donné est un extremum global (voir *e.g.* [171]). Ces considérations font que l'optimisation globale est généralement inenvisageable sur des problèmes de grande taille dont la physique non-linéaire, multiparamétrée, amène l'existence d'un très grand nombre d'extrema locaux. Dans un contexte de méthodes inverses, l'utilisation d'algorithmes d'optimisation globale déterministes peut être trouvée dans [28] mais l'objectif est très spécifique (détermination de l'ensemble des extrema locaux

et des points de bifurcation du problème) et la méthode lourde et complexe.

À l'inverse, l'optimisation locale permet l'utilisation d'algorithmes de descente (méthode de Newton ou quasi-Newton, méthode de gradient, ...) présentant des vitesses de convergence élevées (généralement superlinéaires, éventuellement quadratiques) et donc adaptés aux problèmes de grande dimension. De plus ils sont généralement couplés à des spécifications à priori sur l'espace de recherche appelées contraintes (typiquement contraintes de bornes ou contraintes inégalités et contraintes de norme ou contrainte égalités) permettant de réduire le temps de calcul, le nombre de minima locaux et plus simplement la taille de l'espace de contrôle (voir *e.g.* [40]).

Cependant, le caractère local de la minimisation représente une limitation potentiellement importante de ce type de méthode.

La première conséquence est que la solution optimale calculée par la méthode dépend pleinement du point de départ faisant de l'initialisation de l'algorithme un élément crucial pour l'obtention d'un extremum de qualité. Cet aspect est notamment traité dans le chapitre 5 où l'on constate que l'identification de la constante rhéologique spatialement distribuée est fortement dépendante de l'initialisation.

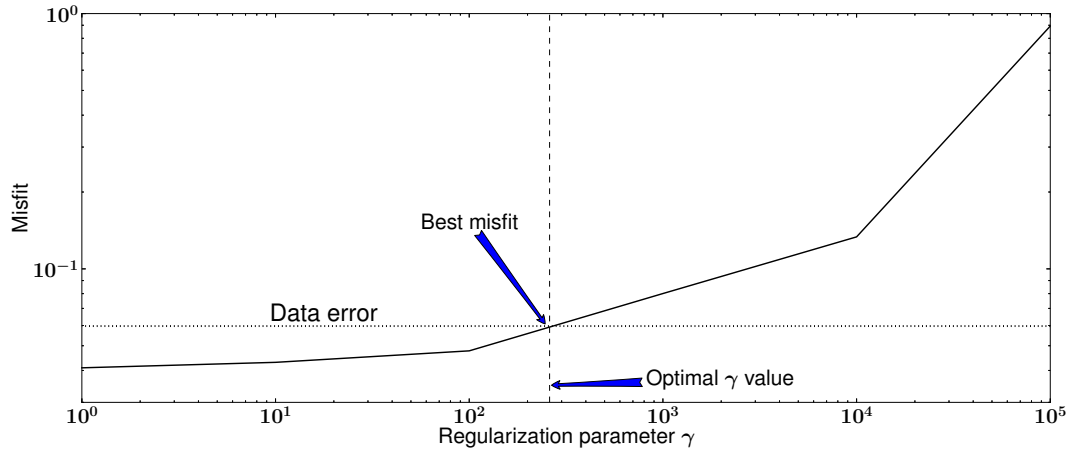
Par ailleurs, comme signalé plus haut, la modélisation géophysique se confronte au problème de l'unicité d'un événement donné dont on ne connaît que peu ou mal l'état du système qui y a mené. En glaciologie, les échelles de temps sont grandes, les processus naturels mis en jeu sont multiples dans leur physique et leurs échelles (*e.g.* de l'interaction de la glace avec les courants océaniques à la variation locale de l'albedo) et définir par un jeu de paramètres l'état du système n'est pas réalisable de manière exhaustive. Ainsi, un modèle glaciologique donné (typiquement de dynamique de la glace), n'intégrera toujours qu'une partie de l'ensemble des processus à priori impliqués dans le système global. Cet aspect, couplé à la non-linéarité du problème, aux erreurs matérielles sur les données et mesures et aux éventuelles approximations multiples amenées dans la modélisation, mènent globalement à un problème peu régulier et présentant un très grand nombre de minima locaux, potentiellement très proches en terme de coût et pourtant issus de jeux de paramètres très différents. Cette caractéristique de modèles complexes à la paramétrisation incertaine est nommée *équifinalité*. Cette équifinalité rend potentiellement difficile le travail du modélisateur inverse dont l'objectif est la calibration d'un modèle et l'identification de paramètres ; dans le cas de résultats très éloignés, il est souvent envisageable de discriminer les différents jeux de paramètres issus de la méthode d'optimisation sur la base de considérations physiques. En revanche, il n'est pas rare d'obtenir un certain nombre de jeux de paramètres réalistes et de qualité similaire.

**Algorithme de minimisation** Dans le cadre de cette thèse, la minimisation de la fonction coût est effectuée à l’aide d’une méthode Quasi-Newton L-BFGS (Low memory-BFGS) utilisant la fameuse formule Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno pour la mise à jour de l’approximation de la Hessienne avec une utilisation mémoire limitée, et plus particulièrement son implémentation au sein du module d’optimisation M1QN3 développé dans [57]. Il est par conséquent adapté pour la résolution de problème de minimisation sans contrainte de grande taille. La recherche du pas de descente est effectuée par une méthode de recherche linéaire satisfaisant les conditions de Wolfe. Le critère d’arrêt principal de l’algorithme est défini par un seuil sur la réduction de la norme du gradient. Comme nous le verrons, selon l’identification réalisée, la valeur de ce seuil peut être tout à fait différente (voir chapitre 5 et l’identification de l’exposant rhéologique et de la consistance). On renvoie au manuel du module M1QN3 [56] pour le descriptif détaillé de la méthode.

**Régularisation de Tychonov** L’utilisation d’une méthode d’optimisation locale pour ce type de problème requiert l’utilisation d’outils annexes à l’optimisation “automatique” en vue d’obtenir un résultat fiable. Un premier, essentiel et présenté plus haut, est l’analyse de sensibilité. Un autre, efficacement couplé au premier, est le travail du modélisateur basé sur des connaissances physiques à priori sur le comportement du système. Cependant, les considérations énoncées plus haut reflètent le caractère *mal posé* du problème de contrôle et la non-unicité de la solution optimale. Il est donc nécessaire, pour l’algorithme d’optimisation, de fournir une fonctionnelle présentant de meilleures propriétés de convexité et de régularité. C’est le rôle de l’opérateur  $N$  introduit dans la fonction coût (3.2). Cet opérateur joue un rôle de régularisation du problème d’optimisation en privilégiant des jeux de paramètres ayant certaines propriétés (voir *e.g.* [124]). On parle de régularisation de *Tychonov*. L’opérateur  $N$  peut être la matrice identité, auquel cas la minimisation privilégiera les solutions de normes faibles, ou bien l’opérateur gradient ou laplacien, privilégiant des solutions présentant une bonne régularité. Ce terme de régularisation est le plus souvent indispensable pour obtenir la simple convergence de la minimisation. L’opérateur  $N$  intègre généralement un coefficient d’échelle  $\gamma$  permettant de régler l’intensité souhaitée du terme de régularisation par rapport au terme de discrédance entre l’état calculé et les observations.

**Principe de Morozov** Le choix du coefficient  $\gamma$  est un problème non trivial qui peut reposer sur différentes considérations. Dans la suite de ce travail, on fera appel au *principe de discrédance de Morozov* pour le choix de la valeur de  $\gamma$  (voir [128]). Pour illustrer le principe, considérons la fonction coût suivante :

$$j(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \|u(\mathbf{k}) - u^{obs}\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla \mathbf{k}\|^2 = j_1 + \gamma j_2 \quad (3.17)$$



**Figure 3.1:** Illustration du principe de discrédance de Morozov.

où  $u(\mathbf{k})$  désigne le champ de vitesse du fluide et  $u^{obs}$  des observations *in-situ* de ce champ de vitesse. Les observations  $u^{obs}$  sont supposées entachées d'une erreur de 1%. Le terme  $j_1$  appelé *discrédance* quantifie l'écart entre les vitesses calculées et les observations. Le terme  $j_2$  appelé *terme de régularisation* pénalise le coût pour les contrôles  $\mathbf{k}$  présentant des oscillations importantes. Le principe de Morozov pour le choix de  $\gamma$  se fonde sur l'idée (de bon sens) que l'on ne souhaite pas, à travers notre processus d'optimisation, obtenir un contrôle  $\mathbf{k}$  réalisant une discrédance  $j_1$  inférieure à la qualité des données (on parle dans ce cas de *sur-ajustement*). Dans cet exemple, cela revient à dire que l'on cherche un contrôle  $\mathbf{k}^*$  tel que l'on ait, au mieux :

$$\frac{\|u(\mathbf{k}^*) - u^{obs}\|^2}{\|u^{obs}\|^2} = 0.01$$

La méthode est alors la suivante : sur la base d'un problème pleinement connu, on réalise l'identification de paramètres pour plusieurs valeurs de  $\gamma$  (généralement pour une progression logarithmique, *i.e.* en faisant varier  $\gamma$  sur plusieurs ordres de grandeurs). On obtient pour chaque valeur de  $\gamma$  une discrédance finale  $j_1$  dont le comportement attendu est que  $j_1$  soit d'autant plus faible que  $\gamma$  est faible. L'application de la méthode est alors généralement présentée graphiquement. On trace dans un repère loglog la discrédance finale  $j_1$  en fonction de  $\gamma$  ainsi qu'une droite horizontale représentant le niveau de précision des observations (ou de manière similaire la meilleure discrédance  $j_1$  accessible). Le principe de Morozov stipule alors que la meilleure valeur pour  $\gamma$  est réalisée à l'intersection entre la courbe des différentes discrédances et le niveau d'erreur sur les observations. La démarche est illustrée sur la figure 3.1.

### 3.3 Implémentation du modèle adjoint

La résolution numérique du modèle adjoint continu pose à priori les mêmes questions que tout système d'équations aux dérivées partielles linéaire. Cependant, comme nous allons le voir, son caractère intrinsèquement lié au modèle direct, ajouté au fait que l'on dispose nécessairement d'une implémentation numérique pour la résolution du modèle direct, font que l'on peut envisager en pratique trois stratégies d'implémentation du modèle adjoint.

#### 3.3.1 Les différentes stratégies

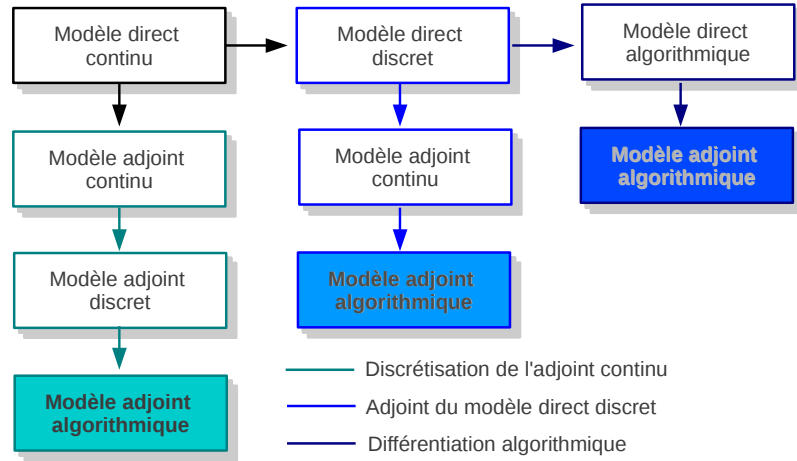
L'approche la plus naturelle pour l'écriture d'un code adjoint, appelée approche continue, consiste en la dérivation analytique du modèle adjoint continu selon le processus présenté plus haut. La discrétisation du modèle adjoint est alors librement soumise aux choix de méthodes numériques (non nécessairement identiques à celles considérées pour la discrétisation du problème direct) ayant des impacts sur la précision du gradient. La principale difficulté de cette méthode dans le cas général est la dérivation, potentiellement laborieuse, du système adjoint, qui peut alors amener à réaliser des simplifications (*e.g.* l'hypothèse d'un opérateur auto-adjoint). Par ailleurs, cette méthode ne produit pas un gradient exact de la fonctionnelle discrétisée.

Par opposition, l'approche discrète, largement répandue en ingénierie, consiste à dériver le modèle adjoint de la formulation discrète du modèle direct. Cette méthode assure une bonne compatibilité entre les modèles discrets et fournit généralement un gradient d'une grande précision.

La troisième approche découle de l'approche discrète dans une vision plus systématique; elle consiste en la *différentiation algorithmique* du code source implémentant le modèle direct. Le principal avantage de cette méthode est que le code adjoint obtenu permet le calcul d'un gradient exact d'un point de vue arithmétique, aux erreurs-machine près (voir [45]). Cette tâche, relativement laborieuse à exécuter manuellement, présente l'avantage d'être systématisable d'un point de vue algorithmique et par conséquent automatisable. Les différentes approches sont schématisées en figure 3.2.

#### 3.3.2 Différentiation automatique

C'est la stratégie de différentiation automatique qui est retenue pour l'implémentation du modèle adjoint du problème de Stokes non-newtonien considéré dans ce travail. La différentiation automatique ou différentiation algorithmique produit



**Figure 3.2:** Représentation schématique des différentes stratégies pour l'obtention d'un code adjoint.

à partir d'un code calculant une fonction  $\mathcal{M}$  un nouveau code permettant le calcul des dérivées de  $\mathcal{M}$  de manière exacte (voir *e.g.* [70]).

### 3.3.2.1 Principes

La différentiation algorithmique exploite le fait que n'importe quel programme informatique est en fait une composition d'opérations élémentaires pouvant être différenciées analytiquement à partir des règles de dérivation usuelles. Les notations utilisées dans cette section s'inspirent principalement de [79] (voir également [82]).

On peut représenter un code informatique par un opérateur  $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui pour un ensemble de paramètres d'entrée  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ , calcule un vecteur de sortie  $Y \in \mathbb{R}^m$ . On désigne par  $m_k$  une opération élémentaire et par  $X_{k-1}$  la valeur des variables utilisées à l'étape  $k$ . En incluant le vecteur des paramètres  $\mathbf{k}$  dans l'ensemble des variables du programme ( $\mathbf{k} \subset X_0$ ), on peut écrire :

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{k}) = m_p(X_{p-1}) \circ m_{p-1}(X_{p-2}) \circ \dots \circ m_1(X_0) \quad (3.18)$$

La matrice jacobienne de  $\mathcal{M}$  est alors donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) = m'_p(X_{p-1}) \times m'_{p-1}(X_{p-2}) \times \dots \times m'_1(X_0) \quad (3.19)$$

où les  $m'_k$  sont les matrices jacobiennes associées aux opérations élémentaires  $m_k$ .

**Mode tangent** En pratique la matrice jacobienne (3.19) est généralement trop compliquée à calculer et trop lourde à stocker en mémoire. On peut en revanche calculer une dérivée directionnelle associée à une direction donnée  $\delta \mathbf{k}$  ainsi :

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{k} = m'_p(X_{p-1}) \times m'_{p-1}(X_{p-2}) \times \dots \times m'_1(X_0) \cdot \delta \mathbf{k} \quad (3.20)$$

où le calcul s'effectue de droite à gauche par de simples produits matrice-vecteur. Cette méthode revient à l'obtention par différentiation algorithmique du modèle linéaire tangent.

**Mode inverse** Comme nous l'avons vu, le modèle linéaire tangent n'est pas approprié pour le calcul du gradient car il nécessite autant d'intégrations que le gradient compte de composantes. La différentiation en mode inverse permet de calculer le produit scalaire entre la jacobienne transposée, c'est à dire le modèle adjoint, et un vecteur  $\tilde{Y}$  :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) \right) \cdot \tilde{Y} = m_1'^T(X_0) \times m_2'^T(X_1) \times \dots \times m_p'^T(X_{p-1}) \cdot \tilde{Y} \quad (3.21)$$

Cette expression est également calculé de la droite vers la gauche par une succession de produits matrice-vecteur. On constate qu'une difficulté est qu'il faut connaître la valeur des variables  $X_k$  dans l'ordre inverse de leur calcul initial. Cette considération amène des stratégies différentes consistant soit à recalculer lesdites variables au moment requis, soit à stocker l'ensemble des variables et à restaurer leurs valeurs, ou encore, plus généralement, à une combinaison de ces deux options. On parle de *check-pointing*. On renvoie au site internet associé à [79] pour plus de détails.

L'utilisation de cette stratégie présente certaines difficultés. La première est la nécessité de disposer d'un code direct dont chaque étape du processus est intégralement implémentée. Cet aspect empêche notamment l'utilisation de bibliothèques à tous les niveaux de l'écriture du code (*e.g.* pour le modèle éléments finis) à l'exception notable de la méthode de résolution du système linéaire.

En effet, l'adjoint d'un système linéaire s'identifie à sa transposée et il est, en pratique, relativement simple de réutiliser l'algorithme de résolution d'un système linéaire utilisé dans le modèle direct pour résoudre le système adjoint. Cette considération permet l'utilisation d'un solveur linéaire "boîte noire", provenant d'une bibliothèque de calcul, en évitant la différentiation du code source du solveur. La méthode est présentée en Annexe A.

Dans notre cadre de résolution d'un problème non-linéaire par un algorithme itératif, une deuxième difficulté se pose sur la technique à adopter pour réaliser l'adjoint de l'algorithme et sur la convergence des dérivées. On considère ici la technique classique d'accumulation retour (voir *e.g.* [71]). Le processus et ses implications sont abordés dans le chapitre 6.

Le code utilisé tout au long de ce travail est développé en Fortran 95. La génération du code adjoint par différentiation automatique du code source est réalisée

avec le logiciel *Tapenade* (voir [79]) qui suit une approche de transformation *source-to-source*.

### 3.3.2.2 Validation du code adjoint

La validation du code adjoint finalement obtenu est une étape indispensable. Il existe deux tests fondamentaux consistant à vérifier, d'une part, que le code adjoint est bien l'adjoint du programme différentié et, d'autre part, que le gradient calculé est juste à une précision suffisante. La première propriété est vérifiée à l'aide du *test du produit scalaire* et la deuxième par le *test du gradient*.

**Test du produit scalaire** Soient  $\delta \mathbf{k} \in P$  un vecteur de perturbation et  $\widetilde{X} \in V$  un état adjoint donné. Le test du produit scalaire consiste à vérifier que la définition du modèle adjoint est numériquement valide. On va donc contrôler la validité numérique (à la précision machine près) de l'identité suivante :

$$\left\langle \widetilde{X}, \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}} \right) \cdot \delta \mathbf{k} \right\rangle_V = \left\langle \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}} \right)^* \cdot \widetilde{X}, \delta \mathbf{k} \right\rangle_P \quad (3.22)$$

Étant donné  $\delta \mathbf{k}$ , on calcule le membre de gauche de l'identité à l'aide du programme linéaire tangent :

$$\delta X = \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}} \right) \cdot \delta \mathbf{k}$$

Étant donné  $\widetilde{X}$ , on calcule le membre de droite de l'identité avec le programme adjoint :

$$\widetilde{\mathbf{k}} = \left( \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{k}} \right)^* \cdot \widetilde{X}$$

On calcule alors les produits scalaires :  $ps_1 = \langle \widetilde{X}, \delta X \rangle$  et  $ps_2 = \langle \widetilde{\mathbf{k}}, \delta \mathbf{k} \rangle$  et on vérifie enfin que  $ps_1 = ps_2$ .

**Test du gradient** Le but de ce test est de contrôler que les composantes du vecteur réponse  $\widetilde{\mathbf{k}}$  du programme adjoint correspondent bien aux dérivées partielles de la fonction coût.

Considérons l'approximation différence finie décentrée à droite issu d'un développement de Taylor avec reste de Lagrange :

$$\frac{j(\mathbf{k} + \alpha \delta \mathbf{k}) - j(\mathbf{k})}{\alpha \delta \mathbf{k}} = \frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) + M_1 \frac{\alpha \delta \mathbf{k}}{2} \quad (3.23)$$

On pose :

$$I_\alpha^1 = \frac{j(\mathbf{k} + \alpha \delta \mathbf{k}) - j(\mathbf{k})}{\alpha \frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{k}} \quad (3.24)$$



Si l'on considère un schéma aux différences finies centré, on a de la même manière :

$$\frac{j(\mathbf{k} + \alpha \delta \mathbf{k}) - j(\mathbf{k} - \alpha \delta \mathbf{k})}{2\alpha \delta \mathbf{k}} = \frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) + M_2 \frac{\alpha^2 \delta \mathbf{k}^2}{3} \quad (3.25)$$

Ce schéma nous amène à définir :

$$I_\alpha^2 = \frac{j(\mathbf{k} + \alpha \delta \mathbf{k}) - j(\mathbf{k} - \alpha \delta \mathbf{k})}{2\alpha \frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{k}} \quad (3.26)$$

Les quantités (3.24) et (3.26) mesurent le rapport entre une approximation par un schéma d'Euler progressif de la dérivée directionnelle de  $j$  dans la direction  $\delta \mathbf{k}$  et sa valeur effective (représentée par l'approximation différences finies). D'après les relations (3.23) et (3.25), on a :  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_\alpha^{1,2} = 1$ .

Le test du gradient consiste à vérifier cette propriété en calculant la quantité  $\frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k})$  avec le programme adjoint. Pour cela, on évalue la quantité  $I_\alpha^{1,2}$  pour des valeurs décroissantes de  $\alpha$  et on vérifie le comportement à la limite. Sur la figure 3.3 est représenté le résultat générique d'un test du gradient contre une approximation différence finie d'ordre 1. La valeur absolue de la quantité  $|I_\alpha - 1|$  est tracée en fonction de  $\alpha$  dans un repère log-log. On observe une décroissance linéaire de l'erreur (*i.e.* une pente de 1 en représentation logarithmique) correspondant au comportement de l'approximation différence finie d'ordre 1. La comparaison avec une approximation d'ordre 2 telle que (3.26) amène de la même manière une pente de 2 sur la décroissance de la quantité  $|I_\alpha - 1|$ . Pour des  $\alpha < 10^{-7}$ , le comportement n'est plus vérifié car les erreurs d'arrondi deviennent prépondérantes (propriété classique des schémas aux différences divisées liée à la précision machine dans le cas d'une résolution en double précision). La réalisation de ce test en quadruple précision permet d'obtenir une décroissance de l'erreur linéaire en échelle logarithmique pour des  $\alpha \geq 10^{-14}$ .

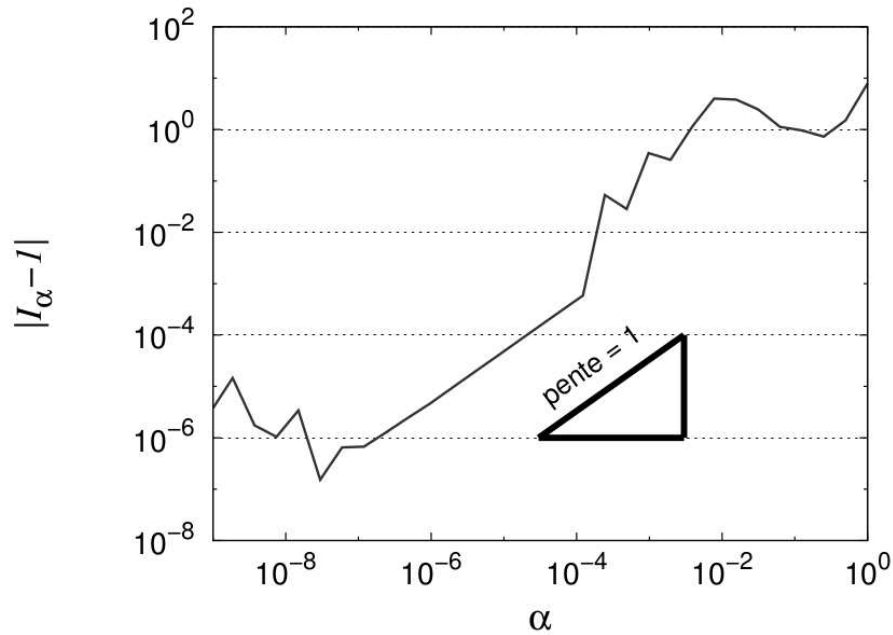
### 3.3.3 Résumé de l'algorithme

La résolution du système d'optimalité (3.16) couplé à l'utilisation de la méthode de descente L-BFGS (routine M1QN3) amène à l'algorithme suivant :

Étant donné  $\mathbf{k}_0$ , pour tout  $n > 0$  :

1. Évaluation de la fonction coût  $j(\mathbf{k}^n; x(\mathbf{k}^n))$  à partir du modèle direct
2. Calcul du gradient  $\nabla j(\mathbf{k}^n)$  à partir du modèle adjoint
3. Calcul d'un itéré  $\mathbf{k}^{n+1}$  tel que :  $j(\mathbf{k}^{n+1}) < j(\mathbf{k}^n)$  à partir de  $j(\mathbf{k}^n)$  et  $\nabla j(\mathbf{k}^n)$  par la routine M1QN3

La convergence est atteinte quand la décroissance du coût  $j(\mathbf{k})$  entre deux itérés successifs est inférieure à une valeur donnée ou bien quand la décroissance du gradient réalisée depuis le début de la boucle d'optimisation est supérieure à une valeur donnée.



**Figure 3.3:** Test du gradient : évolution de la quantité  $|I_\alpha - 1|$  en fonction de la valeur du coefficient  $\alpha$  dans un repère log-log. Calculs réalisés en double précision.

### 3.4 Utilisation et rôle des méthodes inverses en glaciologie

Le rôle des méthodes inverses en géophysique des fluides est de réaliser des estimations quantitatives des caractéristiques de l'écoulement à partir d'observations indirectes (voir *e.g.* [142]). L'assimilation variationnelle de données s'inscrit dans ce cadre et permet de quantifier des caractéristiques variées à partir d'observations tout aussi variées. Nous allons dans un premier temps parcourir les méthodes et techniques d'observation de la cryosphère et les types de données résultants. Dans un deuxième temps, nous tâcherons de résumer l'utilisation faite de ces données pour la modélisation en glaciologie à travers l'application de méthodes inverses.

#### 3.4.1 Les données en glaciologie

Des mesures systématiques de l'écoulement des glaciers ont commencées dans les années 1830 dans les Alpes notamment avec Louis Agassiz (cf. section 2.1 et [36]). L'objectif, à l'époque, était de comprendre les tenants et par la suite les aboutissants du mouvement des glaciers. On s'intéresse à la variabilité spatiale de l'écoulement à la surface et sur l'épaisseur, à la réponse d'un glacier aux changements climatiques (températures, précipitation), à l'état du socle rocheux, etc. L'observation des calottes polaires est plus lente à se mettre en place et commence par le Groenland en

1913 avec l'expédition de Wegener tandis que la première étude détaillée de l'Antarctique commence avec l'expédition scandinavo-britannique de 1950. Depuis lors, la quantité de données et mesures de la cryosphère n'a cessé de croître et le début du XXI<sup>e</sup> siècle présente un progrès considérable dans cette direction à travers l'observation satellitaire.

On distingue basiquement deux types d'observations que sont les observations de terrain et les observations par télédétection. Les mesures *in situ* de la cryosphère sont généralement délicates de par les conditions climatiques propres aux lieux d'observation de la glace (haute montagne ou calottes polaires). Par ailleurs, elles remplissent un rôle de suivi de zones particulières, choisies pour leur caractère exemplaire ou extraordinaire mais ne peuvent apporter d'information globale à l'échelle de la planète. Parmi les quelques 160000 glaciers estimés à la surface du globe, seule une cinquantaine (parmi les plus faciles d'accès) sont régulièrement visités (voir [17]). Au niveau des pôles, l'observation *in situ* a lieu notamment sur des fleuves et langues de glaces précis (comme le glacier Mertz en Antarctique, voir figure 1.4). Comme vu précédemment, ces bassins de drainage jouent un rôle crucial dans le bilan de masse tout en ne représentant qu'une part réduite de la superficie (en Antarctique, 15% du trait de côte évacue 90% de la masse, on parle de 50% du bilan de masse pour le Groenland où l'ablation estivale joue un rôle plus important). Cependant, bien qu'en nombre limité, les glaciers côtiers d'Antarctique et du Groenland ne sont que très rarement sujets à un suivi de proximité (à fortiori récurrent). Par ailleurs, les plateformes de glaces ne sont pas nécessairement de dimension réduites ; les plateformes de Ross et de Ronne en Antarctique couvrent chacune une superficie proche de celle de la France. Enfin, les zones moins actives de ces calottes polaires et représentant la plus grande partie de la superficie sont peu ou pas observées sur le terrain.

Le principal vecteur d'acquisition de données de haute qualité et en quantités importantes (spatialement et temporellement) sur la cryosphère est donc la télédétection à travers l'observation satellitaire et l'observation radar. Les deux types de données les plus précises provenant de l'observation satellitaire sont la topographie de surface et les vitesses d'écoulement en surface.

La topographie est généralement établie par altimétrie satellite (mesure du temps mis par un signal pour effectuer un aller-retour, voir [152]) pour les calottes polaires et par le traitement d'image optiques par stéréoscopie pour les glaciers de montagnes (l'altimétrie radar présentant des fauchées de trop grandes dimensions pour la mesure des glaciers de montagne). Les principales missions satellitaires altimétriques récentes ayant permis une couverture pratiquement complète de l'Antarctique et du Groenland sont les missions européennes ERS-1 (achevée en 2000), ERS-2 (achevée en 2011), EnviSat (achevée en 2012) et la mission américaine ICESat (achevée en 2009). La figure 3.4 représente la topographie de l'Antarctique déduite de la mission



**Figure 3.4:** Topographie de surface de la calotte Antarctique déduite de la mission géodésique d'ERS 1, [151]. Image tirée de [152].

géodésique d'ERS 1 (voir [151]). Aujourd'hui, l'utilisation de méthodes d'interférométries sur des radars à synthèse d'ouverture (InSAR) pour mesurer la topographie remplace avantageusement l'altimétrie satellite et la stéréoscopie d'images visibles et mène à des mesures nettement plus précises. Les altimètres radar de nouvelle génération ont des capacités SAR (à synthèse d'ouverture), voire interférométriques (*e.g.* le satellite Cryosat) permettant d'améliorer grandement la précision dans les zones côtières des calottes polaires.

La donnée de la topographie de la surface libre des calottes polaires est une donnée essentielle contribuant à contraindre et initialiser les modèles d'écoulement, à estimer la rhéologie de la glace et à observer et décrire des mécanismes physiques à petites et grandes échelles. Elle permet par exemple la détection de lacs sous-glaciaires et de réseaux hydrologiques (voir *e.g.* [53]). À travers l'information de pente de surface, elle est également une des informations principales permettant le calcul des vitesses de bilan des calottes polaires.

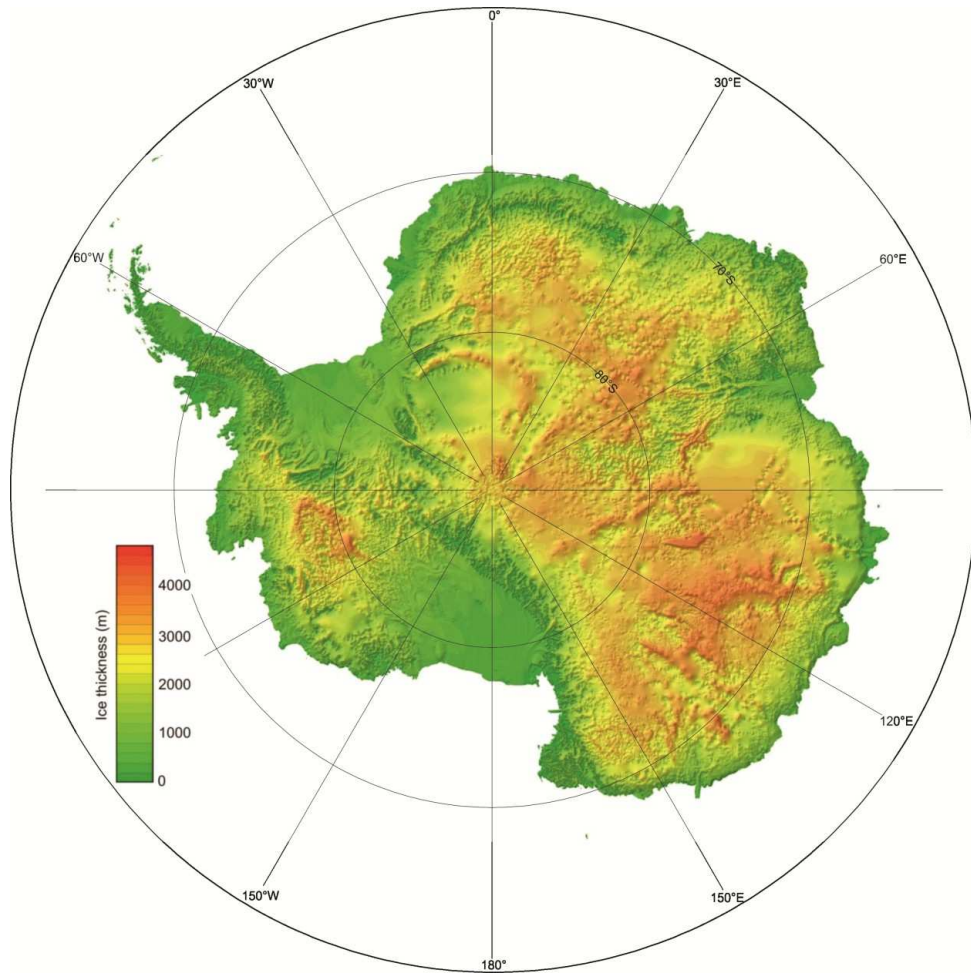
La connaissance précise de la topographie de surface est utilisée pour la détermination de la topographie du socle rocheux à travers la mesure de l'épaisseur de glace. Les mesures d'épaisseur sont des mesures télédéteectées mais principalement obtenues à l'aide de radars basse fréquence de proximité, traînés ou aéroportés ; on recense aussi des techniques de mesure sismiques, gravimétriques ou par forages. On renvoie à [18] pour un exemple d'estimation de changement d'épaisseurs de glace à partir d'imagerie satellitaire optique et à [123] pour un exemple d'estimation d'épaisseur de glace à partir de la topographie de surface et du bilan de masse.

Ces mesures radars donnent accès à d'autres observations comme la détection de lacs sous-glaciaires ou bien la vue en coupe du système de couches isochrones (voir figure 3.6). Les Modèles Numériques de Terrain (MNT) globaux pour l'Antarctique et le Groenland, issus de la compilation d'un grand nombre de données (satellites et radars), sont établis respectivement par Lythe et al. [113] et Bamber et al. [9]. Ces deux MNT fournissent, dans l'ensemble, une grille régulière de résolution 5km ce qui permet de tenir compte de la plupart des glaciers émissaires et fleuves de glaces. Une nouvelle version de MNT pour l'Antarctique, très récemment parue et appelé BEDMAP2, fournit des données de topographie de surface, d'épaisseur et donc de topographie de fond sur une grille de résolution 1km (voir Fretwell et al. [54]). Les données d'épaisseur de glace pour les plateformes flottantes sont dérivées de données d'altimétrie satellite et fournissent une couverture complète de l'ensemble des plateformes flottantes significatives. On représente la carte d'épaisseur de la calotte de glace Antarctique issu des données BEDMAP2 sur la figure 3.5.

Les vitesses de surface sur les calottes polaires sont essentiellement obtenues aujourd'hui par la technique InSAR. Cette technique est appliquée aux calottes polaires pour la première fois dans [66]. Elle a rapidement évoluée, démontrant par la suite des capacités sans précédent pour la mesure des vitesses de glace sur d'importantes surfaces. Les données InSAR pour les calottes polaires sont principalement issues de la mission tandem européenne ERS1-2 (1996-2000), des missions canadiennes RADARSAT, des missions européennes EnviSat et des missions japonaises ALOS. La synthèse de ces données pour obtenir des cartes de vitesses de surface complètes de l'Antarctique et du Groenland n'a pu être réalisée que récemment (voir [144] pour l'Antarctique et [95] pour le Groenland).

La technique d'interférométrie radar est plus difficilement applicable aux glaciers alpins et demande une adaptation des techniques et méthodes de traitements associées au contexte "haute montagne- haute résolution" (voir *e.g.* [166] pour le calcul de champ de vitesse sur les glaciers alpins à partir des données de la mission tandem ERS). L'obtention de vitesse de surface se fait également corrélation d'images optiques. On peut citer notamment les missions SPOT et Landsat7 pour l'obtention d'images optiques haute qualité permettant ce type de corrélation (voir *e.g.* [18]).

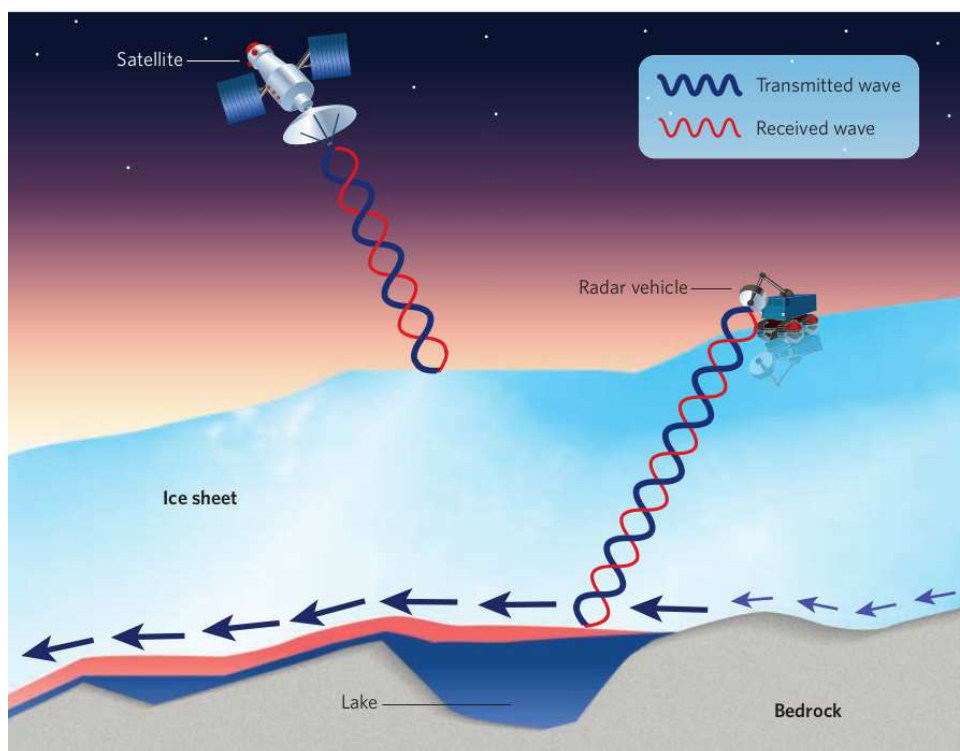
Dans la perspective d'utilisation de méthodes inverses, les données de vitesse



**Figure 3.5:** Carte d'épaisseur de glace de la calotte Antarctique sur une grille de 1km (données BEDMAP2). On retrouve l'aspect "parabolique" (épaisseur nulle à la côte et croissante en direction du centre) d'une calotte à grande échelle. Image tirée de [54].

de surface représentent directement une sortie du modèle numérique dans le cas du modèle de Stokes (ce qui n'est pas vrai pour des modélisation de type *shallow* moyenné). Cet aspect simplifie la tâche de conception d'un opérateur d'observation (voir section 3.1.1). De plus, comme nous le montrons au cours de ce travail, les vitesses de surface d'un écoulement à surface libre, combinées à un domaine de calcul décrit par les données de topographie de surface et du socle, peuvent fournir une information très riche permettant de contraindre les caractéristiques basales et rhéologiques de l'écoulement. Elles sont aujourd'hui les meilleures données à utiliser pour la modélisation inverse de la dynamique de la glace.

L'altimétrie radar, la mesure GPS et la méthode InSAR sont des procédés combinant l'utilisation de matériel moderne et d'instruments de mesure de haute précision à des techniques avancées de traitement de données. Ils donnent accès aujourd'hui à



**Figure 3.6:** Vue schématique de la mesure d’une topographie de surface par observation satellitaire et d’un lac sous-glaciaire par observation radar de terrain. Image tirée de [101].

des mesures de vitesses de surface horizontales et verticales d’une précision de l’ordre de 1% (voir *e.g.* [95], [144], [99]), potentiellement bien inférieure dans les zones très bien couvertes sujettes à des écoulements rapides. Les mesures de topographie de surface atteignent largement ce type de précision et l’erreur finale sur l’épaisseur et donc le modèle numérique de terrain, quoique relativement variable aux grandes échelles, dépendant notamment de la couverture de la zone et de la pente de surface, peut localement atteindre sans difficultés des précision inférieures ou égales à la dizaine de mètres (voir *e.g.* [168], [8]). À plus grande échelle, l’incertitude moyenne pour les données d’épaisseur de glace de Bedmap2 est estimée à trente mètres.

#### 3.4.2 Des données au modèle et du modèle aux données

Un modèle réduit une situation réelle complexe à un système fermé représentant les caractéristiques principales du problème à travers les lois de la physique et la paramétrisation. Comme nous l’avons vu, il est classique que les données et observations nourrissent la modélisation dans sa conception et sa validation. Les méthodes inverses jouent un rôle dans cette étape notamment à travers l’identification de paramètres. Cependant, comme nous l’aborderons dans les chapitres 4 et 5, on trouve à travers l’analyse de sensibilité une capacité pour le modèle à nourrir la démarche de production d’observations notamment en aidant à une réduction et à une pondéra-

tion de la paramétrisation, permettant de cibler les mesures à effectuer et d'évaluer la qualité attendue, mais aussi en localisant des zones d'intérêt potentielles comme par exemple un lac sous-glaciaire de petite taille ou bien une zone présentant un régime d'écoulement particulièrement adapté au forage.

Les deux sens du processus d'interaction entre données et modèles sont donc soutenus par l'utilisation de méthodes inverses et s'inscrivent dans une démarche à privilégier pour la réalisation de prédictions (ou simulations "pronostiques").

En modélisation géophysique et notamment en glaciologie, comme nous avons pu le voir (cf. section 1.2), la validité des modèles et leur capacité à la prédiction est variable et l'utilisation du maximum de données disponibles est une étape cruciale dans la perspective de la réalisation d'une prédiction fiable. L'objectif des méthodes inverses en glaciologie est la reconstruction des paramètres non ou difficilement mesurables nommément le coefficient de friction et la rhéologie. Comme nous l'avons vu en section 2.5, un coefficient de friction est un modèle en soi qui intègre de nombreux processus physiques agissant à des échelles variées qu'on ne sait pas ou difficilement décrire. Le modèle de loi de glissement est donc une paramétrisation empirique simplifiée d'un processus multiéchelle. De la même manière, la glace est un fluide *a priori* inhomogène et anisotrope que l'on modélise par une loi de puissance intrinsèquement isotrope. De plus, une loi rhéologique est un modèle généralement issu de mesures réalisées en laboratoire à des échelles tout à fait différentes de celle d'une calotte polaire.

On s'intéresse au cours de ce travail à ces deux modélisations d'un point de vue numérique en tâchant d'établir, à partir de la description la plus fine de la dynamique de la glace et d'un problème inverse exact, ce que l'on peut espérer obtenir des méthodes inverses pour contraindre les écoulement glaciologiques, tant du point de vue de l'analyse de sensibilité que de celui de la calibration.

Cependant, il est important de rappeler que les études réalisées dans ce travail sont faites pour une géométrie donnée du problème. Le très faible nombre de Reynolds associé aux écoulements de glace et leur caractère quasi-statique rendent largement exploitables les observations, sensibilités et calibrations dites diagnostiques. Cependant, les écoulements de glace ne sont que rarement à l'équilibre (*e.g.* les calottes polaires) et les développements précédents ne s'appliquent pas à la simulation instationnaire (pronostique) aux grandes échelles de temps. En effet, en présence d'un domaine mobile, le développement d'un modèle adjoint intégrant la forme de la surface comme variable de contrôle s'apparente, d'après la formule de Leibniz, à un problème d'optimisation de forme nécessitant l'utilisation de méthodes spécifiques non abordées dans ce travail.



## 3.5 Le logiciel DassFlow-Ice

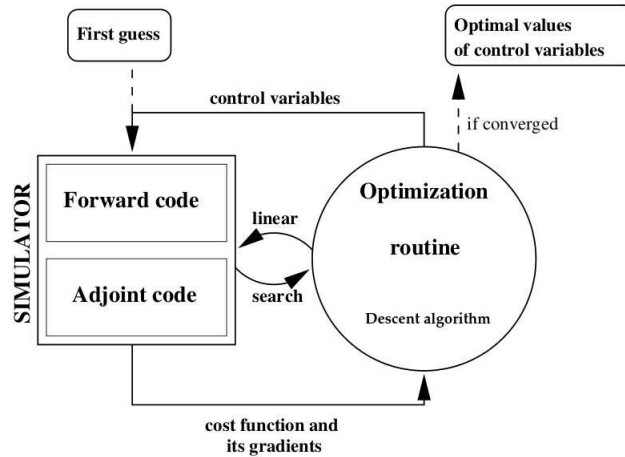
L'ensemble de ce travail s'appuie sur le développement d'un logiciel de simulation directe et inverse d'écoulements fluides à bas Reynolds, présentant une rhéologie non-linéaire de type loi de puissance, nommé *DassFlow-Ice*. La formulation variationnelle du système d'équations aux dérivées partielles (2.52) dans les bons espaces fonctionnels et son caractère bien posé sont donnés au chapitre 4 en section 4.3. L'ensemble du logiciel a été développé en Fortran 95 tout au long de ce travail de thèse. Dans une perspective de différentiation automatique du code source maîtrisée, il ne fait appel à aucune bibliothèque de calcul à l'exception du solveur linéaire direct MUMPS (voir [3]).

### 3.5.1 Structure du code de calcul

Le modèle direct implémente la discrétisation, en éléments finis triangles de *Taylor-Hood*, et la résolution, pour un système de conditions aux limites fourni par l'utilisateur, des équations de Stokes (2.52) en deux dimensions. La matrice associée au système d'équations (2.52), à champ de viscosité constant par triangle donné, est assemblée et résolue comme un seul système linéaire non symétrique par une méthode directe contre un second membre assemblant la force de volume liée à la gravité. Un algorithme itératif est utilisé pour la résolution du système non linéaire global associé au comportement en loi de puissance. Les différentes stratégies de résolution du problème non-linéaire sont développées au chapitre 4 en section 4.4. Les variables de sorties principales sont la vitesse et la pression et l'état calculé du système est représenté par la fonction coût (*e.g.* equation (3.17)). L'ensemble de cette composante du code est appelé le *code direct*.

Le modèle adjoint algorithmique est obtenu par différentiation automatique du code source direct à l'aide du logiciel Taped (voir [79]). Son développement s'appuie sur le savoir-faire issu du logiciel *DassFlow* (voir [37, 83]) originellement dédié à la simulation directe et inverse de problèmes d'hydraulique fluviale basée sur des équations de type Saint-Venant. Le système adjoint est résolu de même à l'aide du solveur direct MUMPS, utilisé en tant que "boîte noire" dans le code direct, en utilisant la stratégie décrite en Annexe A. Les variables de sortie sont les gradients des variables de contrôle considérées et l'état est représenté par le gradient de la fonction coût. Le choix des variables de contrôle actives au cours d'une simulation sera généralement un sous-ensemble de toutes les variables de contrôle potentielles défini par l'utilisateur. Cette composante du code est appelé le *code adjoint*.

D'un point de vue numérique, les codes direct et adjoint coexistent au sein d'une même routine appelée le *simulateur*. Une étude de sensibilité nécessite un passage dans le simulateur soit une intégration du modèle direct, un calcul de coût puis une



**Figure 3.7:** Structure générale du code de calcul *DassFlow-Ice*.

intégration du modèle adjoint pour enfin calculer le gradient de la fonction coût relativement aux variables de contrôle choisies. Dans le cas d’une identification de paramètres, le gradient de la fonction coût calculé par le simulateur est utilisé par la méthode d’optimisation quasi-Newton BFGS (routine M1QN3, voir [57]) pour générer de nouvelles valeurs des variables de contrôle sur un critère de décroissance stricte du coût. Une convergence est établie sur la base de critères de décroissance successive du coût, de décroissance globale du gradient et d’un nombre d’itérations maximal.

La version bidimensionnelle du code développée dans le cadre de cette thèse est prospective au sens où elle sert à établir l’utilité, les forces et faiblesses des différentes méthodes numériques. Ce code sert donc de modèle à son homologue tridimensionnel en cours d’élaboration (cf. [37]). Les détails numériques d’implémentation de la version 3D ainsi qu’un premier calcul de sensibilité sont donnés en Annexe B. La structure générale du code est schématisée par la figure 3.7.

On présente ci-après des analyses de sensibilité à la consistance et à la friction ainsi qu’une identification du coefficient de friction sur le glacier Variegated à partir de données réelles. Cette présentation simplifiée a pour but de synthétiser et d’illustrer le processus global implémentant l’ensemble des méthodes et modèles présentés précédemment.

### 3.5.2 Une première étude : le glacier Variegated

La suite de ce travail s’attache principalement, sur la base de données synthétiques, à l’étude approfondie des potentiels et limitations des méthodes inverses en glaciologie à travers l’utilisation du modèle adjoint associé au problème de Stokes en loi de puissance sans hypothèse simplificatrice. À titre d’exemple de synthèse, on présente dans cette section une application du logiciel *DassFlow-Ice* contenant deux

analyses de sensibilité par rapport à la consistance du fluide  $\eta_0$  (voir équation (2.21)) et au coefficient de friction  $\beta$  (voir équation (4.14)-(4.15)) ainsi qu’une identification du coefficient de friction à partir des mesures de vitesses de surface réalisées lors de l’année 1978 et des données topographiques associées (voir [141]). Ces résultats ont fait l’objet d’une présentation orale à l’assemblée générale de la *European Geophysics Union* (EGU) d’avril 2011 à Vienne.<sup>1</sup>

Le glacier Variegated est un glacier de vallée de taille modeste présentant une topographie du socle rocheux relativement simple (voir figure 3.9). Ce glacier est bien connu des glaciologues et a été le sujet d’un suivi rapproché, particulièrement pendant la période 1973 – 1983, à cause d’un phénomène de *crues glaciaires* (*surge*) récurrent. C’est un glacier tempéré situé en Alaska. Il mesure environ 20km de long pour 1km de large.

On impose une condition de Dirichlet homogène sur frontières latérales. Une friction basale  $\beta = 0.005 \text{MPa} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{a}$  et une consistance  $\eta_0 = 40 \text{MPa} \cdot \text{a}^{1/3}$  sont imposées. La surface du glacier est soumise à une condition de contrainte nulle. Ce jeu de paramètres, inspiré de [132], permet d’obtenir des vitesses de surface raisonnablement similaires aux vitesses de surface mesurées pour l’année 1978 et nous servira donc d’état de référence.

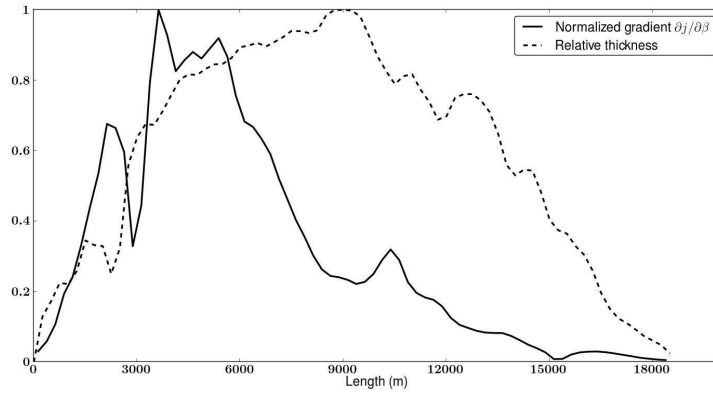
Le phénomène de crue glaciaire est un phénomène complexe, encore mal compris, observable par une augmentation de la vitesse d’écoulement du glacier très importante (de 10 à 100 fois la vitesse habituelle) pendant une courte période suivi d’un retour à la normal. Le jeu de données de 1978 a été réalisé en été et correspond au jeu de données le plus complet disponible sur cette période. Il fournit approximativement une mesure de vitesse de surface tout les 200m.

On utilise une fonction coût très simple réalisant l’écart en norme  $L^2$  des vitesses de surface calculées aux vitesses observées (correspondant à la fonction coût (3.17) avec  $\gamma = 0$ ). On réalise tout d’abord des analyses de sensibilité basées sur les vitesses de surface de l’année 1978 (voir figure 3.11) par rapport au coefficient de friction et à la constante rhéologique autour des valeurs données ci-dessus. On calcule donc le gradient de la fonction coût par rapport au coefficient de friction et à la constante rhéologique. Les champs résultants ont naturellement les mêmes dimensions que la variable de contrôle considérée. La sensibilité à la friction est donc une fonction de l’abscisse et la sensibilité à la constante rhéologique est un champ bidimensionnel constant par cellule. On représente ces sensibilités sur les figures 3.8 et 3.9 respectivement.

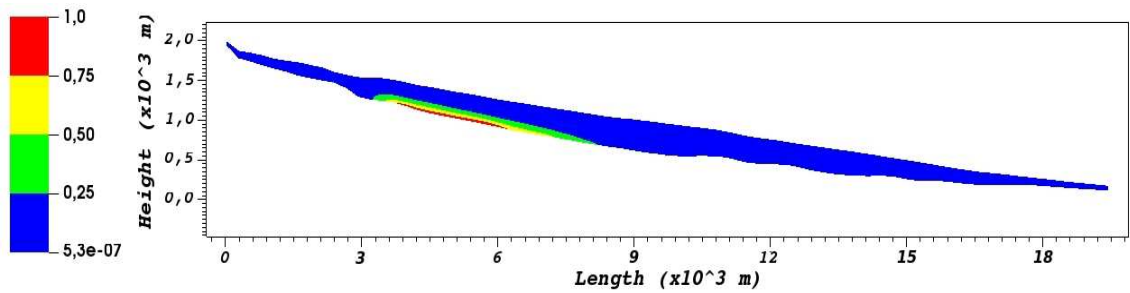
La sensibilité à la friction montre une corrélation très forte avec l’épaisseur du glacier (et donc avec la topographie, la surface étant relativement plane), particuliè-

---

1. N. Martin et J. Monnier, “Sensitivity analysis using the variational data assimilation software DassFlow-Ice”, Oral Presentation, 3-8 April 2011, European Geosciences Union - General Assembly (EGU11), Vienna, Austria.



**Figure 3.8:** Sensibilité au coefficient de friction  $\beta$  autour de la valeur  $\beta = 0.005 \text{MPa} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{a}$  pour le glacier Variegated à partir des vitesses de surfaces mesurées pour l'été 1978 et épaisseur normalisée du glacier.

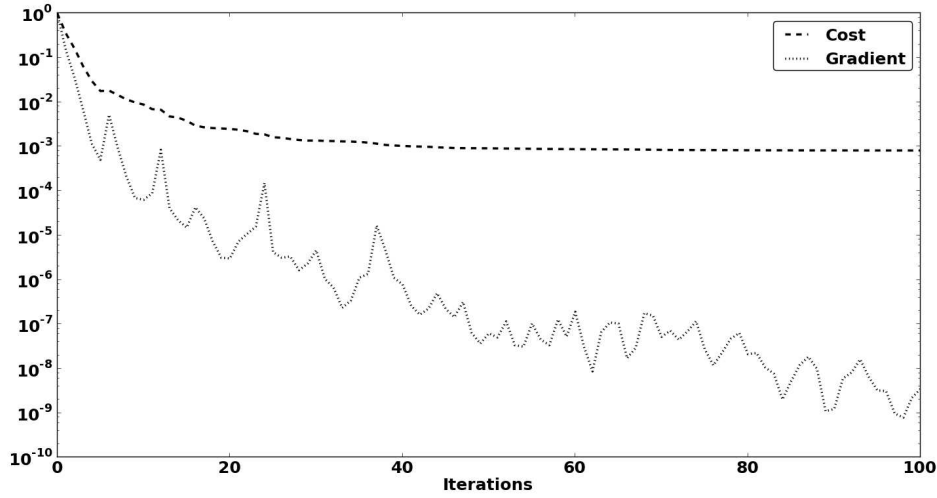


**Figure 3.9:** Sensibilité à la constante rhéologique  $\eta_0$  autour d'une valeur  $\eta_0 = 40 \text{MPa} \cdot \text{a}^{1/3}$  sur le glacier Variegated à partir des vitesses de surfaces mesurées au cours de l'été 1978.

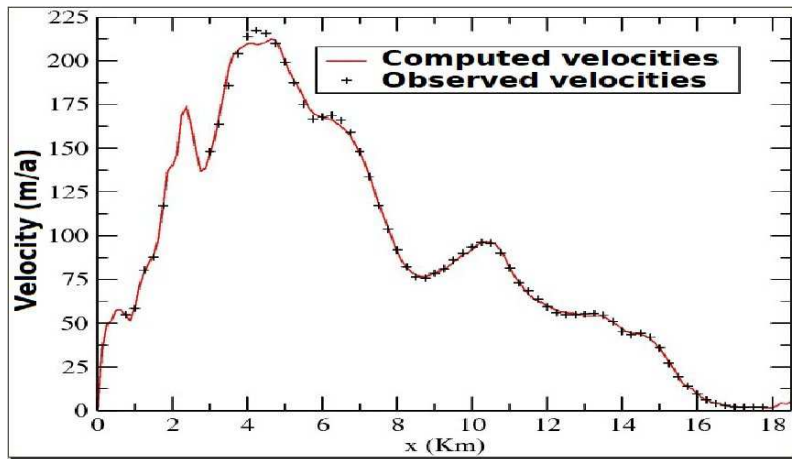
rement pour  $0 < x < 6 \text{km}$ . Les élargissements brutaux semblent précéder une zone de forte sensibilité (voir figure 3.8). La sensibilité maximale est atteinte à la fin du premier élargissement brutal. La stabilisation puis la décroissance de l'épaisseur semble correspondre à une sensibilité décroissante. Cette corrélation forte avec la topographie suggère un rôle dominant du paramètre de friction dans la dynamique du glacier.

La sensibilité à la constante rhéologique nous montre une sensibilité particulièrement élevée dans la cuvette du glacier, particulièrement en amont, où l'épaisseur est importante. Par ailleurs, elle est exclusivement concentrée au fond. Ce résultat confirme l'idée que la modélisation du socle rocheux est une composante dominante dans la dynamique de surface résultante.

Ces résultats préliminaires de sensibilité se retrouvent dans la plupart des écoule-



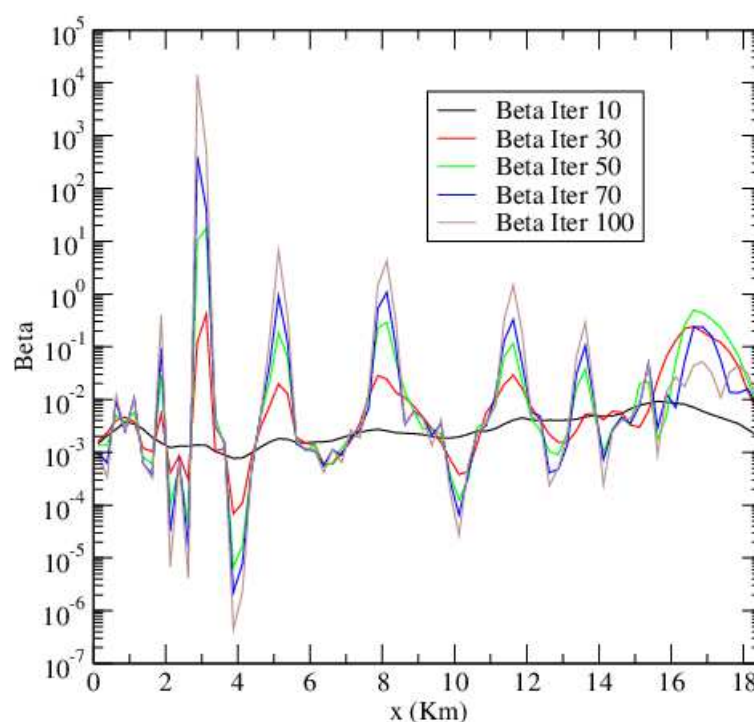
**Figure 3.10:** Evolution du coût et du gradient au cours des itérations de l'algorithme de minimisation.



**Figure 3.11:** Vitesses de surface calculées et données de vitesses mesurées au cours de l'été 1978, voir [141].

ments considérés par la suite et sont largement repris et interprétés dans les chapitres suivants (voir chapitres 4 et 6 pour les sensibilités à la friction et chapitre 5 pour les sensibilités à la rhéologie). On réalise ensuite une identification du coefficient de friction le long du socle rocheux sans régularisation à priori ( $\gamma = 0$ , voir (3.17)). On représente sur la figure 3.10 l'évolution du coût et de la norme du gradient au fil des itérations de la procédure de minimisation. Les vitesses de surface observées et calculées sont représentées sur la figure 3.11.

Les résultats d'identification ont mis en avant plusieurs éléments. Tout d'abord,



**Figure 3.12:** Évolution du coefficient de friction identifié au cours du processus d'assimilation en l'absence de régularisation.

au vu de la figure 3.11, on constate bien une très grande capacité à contrôler l'écoulement à travers le coefficient de friction ; en effet, la correspondance entre vitesses calculées et vitesses observées est pratiquement parfaite. Ensuite, la figure 3.12 montre un coefficient de friction présentant une grande variabilité spatiale. À noter qu'une telle variabilité est attendue considérant le comportement spécifique de crues glaciaires observé sur ce glacier ; cette grande variabilité peut être notamment représentative d'un réseau hydrologique sous-glaciaire complexe.

La nécessité d'une régularisation est également soulignée par la figure 3.12. Le coefficient de friction identifié prend des valeurs sur une gamme de plus en plus large au fil de la minimisation pour obtenir une réduction du coût. Le coefficient de friction final, bien que permettant une reconstruction très fidèle des vitesses de surface, introduit possiblement des hautes fréquences non physiques et conduit globalement un surajustement (voir section 3.2.3) des vitesses de surface considérant leur niveau de précision d'environ 10%.



# Solveur éléments finis quatre champs pour des écoulements quasi-newtonien

---

4.1	RÉSUMÉ EN FRANÇAIS . . . . .	76
4.2	INTRODUCTION . . . . .	78
4.3	THE FLUID MODEL . . . . .	81
4.4	BASIC NUMERICAL PROCEDURES . . . . .	83
4.4.1	<i>Mixed Weak Formulation</i> . . . . .	83
4.4.2	<i>Classical Solvers and Limitations</i> . . . . .	86
4.5	FOUR-FIELD SADDLE POINT PROBLEM . . . . .	88
4.5.1	<i>Four-Field Saddle-Point Formulation</i> . . . . .	88
4.5.2	<i>Existence and Uniqueness of the Saddle-Point</i> . . . . .	90
4.5.3	<i>Characterization of the saddle-point</i> . . . . .	93
4.5.4	<i><math>\mathbf{LA}</math> and <math>\mathbf{LA}\theta</math> algorithms</i> . . . . .	96
4.5.5	<i>Finite element discretization</i> . . . . .	98
4.6	PERFORMANCES OF $\mathbf{LA}$ AND $\mathbf{LA}\theta$ ALGORITHMS . . . . .	100
4.6.1	<i>Convergence curves</i> . . . . .	100
4.6.2	<i>Comparative performances</i> . . . . .	103
4.6.3	<i>Summary</i> . . . . .	106
4.7	LOCAL SENSITIVITY ANALYSIS . . . . .	107
4.7.1	<i>Observations and cost function</i> . . . . .	108
4.7.2	<i>Adjoint model</i> . . . . .	108
4.8	NUMERICAL EXPERIMENTS . . . . .	109
4.8.1	<i>Analytical Poiseuille-like solution</i> . . . . .	109
4.8.2	<i>The viscoplastic steady wave</i> . . . . .	110
4.8.3	<i>Geophysical test case : the Mertz glacier</i> . . . . .	112
4.9	CONCLUDING REMARKS . . . . .	115

---

Le présent chapitre a été soumis à publication sous une forme très similaire auprès de la revue *SIAM-Journal on Scientific Computing*. Afin de limiter les redondances, la formulation variationnelle du modèle fluide et son caractère bien posé ainsi que les stratégies de résolution classiques associées n'ont pas été présentés avant et sont



donc données dans les sections 4.3 et 4.4. Le résumé reprend et complète, en français, l'introduction et la conclusion originale en anglais, également fournies dans le chapitre en sections 4.2 et 4.9, et revient sur les principaux résultats obtenus.

## 4.1 Résumé en français

On s'intéresse dans ce chapitre à la résolution numérique du problème de Stokes incompressible (2.52) associé à l'écoulement gravitaire d'un fluide quasi-newtonien décrit par une loi de puissance (2.30) et discrétisé par une méthode d'éléments finis. La forme généralement considérée est celle d'une formulation mixte à deux champs inconnus que sont la vitesse et la pression. Dans des espaces de Sobolev appropriés (dépendant de l'exposant de la loi rhéologique), des estimations d'erreurs à priori associées à l'approximation éléments finis mixtes sont obtenus dans [10]. Des versions plus fines sont fournies dans [153] et [13] ainsi que des estimations d'erreurs à posteriori. Une autre approche pour la résolution éléments finis de ce problème considère une formulation trois champs introduisant le tenseur déviateur  $\underline{\mathbf{S}}$  comme une inconnue du problème. La loi de comportement fluide (2.17) reliant contraintes déviatoires et champ de vitesses ne fait alors plus partie de l'équation des moments et devient la troisième équation du problème. À domaine donné, l'existence et l'unicité d'une solution pour cette formulation trois champs et son approximation éléments finis sont établies dans [11] ainsi que des estimations d'erreurs à posteriori (pour des conditions limites de Dirichlet homogène). Ces estimations d'erreurs pour le problème à trois champs sont améliorées dans [117] en introduisant le tenseur des contraintes  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  comme une inconnue à la place du déviateur  $\underline{\mathbf{S}}$ . Des résultats similaires sont obtenus pour des solutions moins régulières et des conditions limites plus générales dans [49]. Des expériences numériques sont menées avec la base éléments finis construite dans [50] (basée sur l'élément fini de Raviart-Thomas) qui fournit une conservation locale (par élément) de la masse et de la quantité de mouvement. La résolution est faite par un algorithme de point fixe.

L'algorithme construit dans ce chapitre repose sur une formulation trois champs du problème qui introduit le tenseur des taux de déformations  $\underline{\mathbf{D}}$  comme inconnue du problème (semblable à [60, 61]). Cette nouvelle inconnue est associée à une contrainte égalité fictive représentant la définition du tenseur des déformations (voir (4.47)). Cette contrainte est imposée au sens faible de même que la contrainte d'incompressibilité. Le problème de minimisation de la fonctionnelle énergie sous ces contraintes est alors décrit par une formulation point-selle à quatre champs où les inconnues sont la vitesse  $\mathbf{u}$  et le tenseur des taux de déformations  $\underline{\mathbf{D}}$  et les multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte d'incompressibilité et à la contrainte fictive s'identifient respectivement à la pression  $p$  et aux contraintes déviatoires  $\underline{\mathbf{S}}$ . La discrétisation éléments finis utilise un triplet de type *Taylor-Hood étendu* offrant une approximation quadratique continue pour la vitesse, linéaire continue pour la pres-

sion et linéaire par morceaux pour les inconnues tensorielles  $\underline{\mathbf{D}}$  et  $\underline{\mathbf{S}}$  (voir figure 4.2).

À partir d'un théorème de dualité et d'arguments de convexité, on démontre l'existence d'une solution au problème de point-selle quatre champs dans des espaces fonctionnels dépendant de l'exposant rhéologique (voir théorème 1 et proposition 2). L'algorithme de résolution s'inspire de [61] mais adapté à notre formulation quatre champs. C'est un algorithme de type lagrangien augmenté qui permet de réduire significativement le temps de résolution du problème direct (par rapport aux méthodes de point fixe et de Newton) tout en offrant un comportement robuste sur une plus large gamme d'exposants rhéologiques. Ces résultats sont présentés dans le tableau 4.2. De plus, la discrétisation linéaire par morceaux utilisée pour les inconnues tensorielles amène une structure du système matriciel de type diagonale par blocs qui est exploitée pour obtenir un solveur itératif très performant ne requérant que très peu de mémoire (voir section 4.6.2). Ce type d'algorithme basé sur des techniques de *splitting* étant adapté à la résolution de problèmes variationnels non-différentiables, il a déjà été employé pour la résolution d'écoulements fluides viscoplastiques à seuil de type Bingham (voir *e.g.* [148], [64]). Il a été introduit pour la résolution du problème du p-laplacien (qui est un problème de type loi de puissance pour les fluides de Ladyzenskaya) dans [62] (voir également [60]).

À notre connaissance, la présente dérivation d'une formulation point-selle quatre champs bien posée associée au problème de Stokes pour les fluides en loi de puissance n'avait jamais été réalisée de même que la démonstration de performances algorithmiques similaires.

Dans une perspective d'identification de paramètres, la rapidité de calcul ainsi que la faible consommation mémoire associée à l'algorithme proposé est particulièrement pertinente. D'une part, le coût de calcul CPU d'un cycle d'assimilation de données utilisant une méthode d'optimisation au premier ordre est de l'ordre de 50 à 100 fois celui d'une résolution directe. Aussi, la précision du gradient fourni par le modèle adjoint étant fortement liée à la précision de résolution du problème direct, l'amélioration de la résolution du problème direct peut amener un gain de temps important. D'autre part, la technique d'accumulation retour associée au calcul d'un état adjoint obtenu par différentiation algorithmique est particulièrement demandeur en mémoire (voir chapitre 6) et l'implémentation proposée pour l'algorithme représente un atout solide pour pallier cette difficulté (voir section 4.6.2).

Dans la deuxième partie de ce chapitre, des analyses de sensibilité variationnelle à surface donnée (sensibilité quasi-statique), basées sur le modèle adjoint, sont menées sur des situations d'écoulement réalistes. Une sensibilité à l'exposant rhéologique spatialement distribué sur une situation expérimentale inspirée de [31] représentant une vague statique de Kaolin est réalisée. Le rôle dominant de la rhéologie au fond (et donc à fort cisaillement) est mis en évidence. Comme souligné par Cham-

bon et al. [31], la mesure de l'exposant rhéologique est plus difficile à réaliser dans les gammes de cisaillements extrêmes car généralement perturbée par des artefacts expérimentaux. Ce résultat permet de conclure que l'attention doit être particulièrement portée sur les mesures réalisées à fort cisaillement et qu'une précision moindre sur les mesures rhéologiques à faible cisaillement est acceptable en vue d'une calibration de la simulation numérique.

On s'intéresse ensuite à la sensibilité du modèle au coefficient de friction dans le cadre d'un écoulement glaciologique à grande échelle calculée sur le profil radar du glacier Mertz (voir figure 1.4). Deux analyses de sensibilité, calculée autour d'une même valeur de friction, sont réalisées dans le cas de vitesses de surface obtenues pour une friction uniforme et pour une friction présentant une zone de glissement parfait de faible longueur d'onde (deux fois l'épaisseur de l'écoulement). Cette zone de glissement parfait induit une augmentation faible des vitesses de surface sur une zone plus large que la zone de glissement parfait elle-même. Cette zone de glissement parfait, difficilement détectable au vu des vitesses de surface apparaît très nettement dans l'analyse de sensibilité (voir figure 4.7). Cette expérience montre la possibilité de mettre en évidence, à partir d'une géométrie et d'observations de vitesses de surface, les accroissements momentanés et localisés du glissement basal. Ce type d'évolution, locale en espace et en temps, du glissement basal est primordial pour la modélisation des fleuves de glace car fortement corrélé aux variations de pression d'eau sous-glaciaire et donc aux phénomènes de “*stick-slip*” (voir [52]). Par suite, de telles analyses de sensibilité peuvent également servir d'outil aidant à la définition de zones d'intérêt pour l'observation et la mesure.

Plus généralement, les analyses de sensibilité présentées montrent bien la capacité de la présente approche, basée sur le modèle adjoint, à fournir des interprétations à priori des écoulements observés à travers des observations de surface, et donc la capacité à voir à travers le filtrage naturel qu'amène un écoulement non-linéaire dans la transmission des informations du fond vers la surface.

## 4.2 Introduction

An isotropic relationship between the extra-stress tensor  $\underline{\mathbf{S}}$  and the rate of deformation tensor  $\underline{\mathbf{D}}$  leads to the *generalized Newtonian model*, see e.g. [6]. It usually expresses  $\eta$  as a function of the shear rate  $\dot{\gamma}$  (which is itself a function of the second invariant of the rate of deformation tensor  $\underline{\mathbf{D}}$ ) :

$$\underline{\mathbf{S}} = 2\eta(\dot{\gamma})\underline{\mathbf{D}}(u) \quad (4.1)$$

We focus on a standard type of constitutive equation called *power-law* representing the viscosity  $\eta$  as a power of the shear-rate  $\dot{\gamma}$ . Hereafter we consider the classical

viscoplastic Norton-Hoff law or simply *power-law* (see *e.g.* [20]). These laws occur in many mathematical models of physical process like polymeric solutions (see *e.g.* [20], [77]), mud flows (see *e.g.* [130], [35]), ice flows (see *e.g.* [34],[81]), avalanches and debris (see *e.g.* [5],[91]), lava (see *e.g.* [146],[51]), etc. Many of these flows involve gravity-driven mass movements and can thus require the modeling of a free-surface moving in time (see *e.g.* [4]).

Approximations of these flows are generally computed considering the velocity-pressure Stokes system described using finite element method. In appropriate Sobolev spaces, enhanced inf-sup condition for the power-law two-field problem and error estimates on the corresponding mixed finite element approximation are proved in [10] and improved in [153] (see also [13]). Another approach consists in deducing a nonlinear *three-field formulation* for the incompressible power-law Stokes' system based on the viscosity dependence on the second invariant of the rate of deformation tensor. For a given domain  $\Omega$ , existence and uniqueness of the power-law continuous problem (treated as a limit case of the White-Metzner viscoelastic model) and of its three-field finite element approximation are given in [11] as well as error bound for homogeneous Dirichlet boundary conditions. Finer error estimates are obtained in [117] using the Cauchy stress tensor  $\underline{\sigma}$  as an unknown instead of the extra-stress tensor  $\underline{S}$ . Similar results are obtained for less regular velocity, more general boundary conditions and without the assumption of an invertible constitutive relationship in [49]. It is important to notice that [117] and [49] treat with a Ladyzenskaya constitutive relationship that considers the norm of the velocity gradient instead of the rate of deformation tensor (thus, deviatoric tensor and stress tensor are not symmetrical). In terms of numerical experiments, they use the conforming finite element basis constructed in [50] based on the Raviart-Thomas finite element which provides local (at element level) conservation of momentum and mass ; the nonlinear problem is solved by a fixed point algorithm.

We elaborate here an augmented Lagrangian type solver based on duality methods and splitting technique. The rate of deformation tensor  $\underline{D}$  is introduced as an unknown of the problem (see [60, 61]). It leads to a *four-field saddle-point formulation*. An extended Taylor-Hood discrete representation with quadratic continuous velocity, linear continuous pressure and linear discontinuous extra-stress and rate of deformation tensor is considered for the discretization. Using a duality theorem and convexity arguments, we ensure the existence of a saddle-point for this formulation in power-law index-dependent functional spaces. The incompressibility constraint is imposed in a weak sense. We elaborate a new algorithm that noticeably reduces computational time for direct solving and succeeds in a larger range of power-law exponent than classical fixed point method. In addition, the discontinuous piecewise linear discretization of the tensorial unknowns leads to a very convenient block diagonal matrix structure. This structure is exploited to obtain a very fast iterative

solver with very low memory needs. Similar augmented Lagrangian type algorithm based on splitting techniques being suited for non-differentiable variational problem, it has been mainly employed for the solution of non Newtonian flows involving a yield stress (see [64]). It has been introduced to solve the p-Laplacian problem (which is a power-law type problem for Ladyzenskaya fluids) by [62] (see also [60]). To the best of our knowledge, a four-field saddle-point formulation has never been derived for the present power-law Stokes problem and similar algorithmic efficiency has not been demonstrated.

The second part of this work consists in building a variational sensitivity analysis tool based on an adjoint method. The adjoint model is obtained using algorithmic differentiation of the source code. The adjoint-state method provides the derivatives of a scalar function for every direction of derivation for a cost independent of the control space dimension. It is therefore an efficient method for computing local sensitivities for large-scale systems and a crucial step within an adjoint-based parameter identification process (see *e.g.* [29]). Indeed, parameters such as the basal slipperiness, the power-law exponent or the rheological rate factor are empirical parameters that include various physical effects and the sensitivity analysis allows to weight and compare underlying physics at work. Moreover, these quantities can be hard or impossible to measure and sensitivity analysis offers perspectives to help defining experimental protocols regarding of measurements location and quality.

The present study focuses on the sensitivity analysis with respect to spatially distributed parameters, namely the basal slipperiness coefficient  $\beta$  and the power-law exponent  $s$ . The continuous adjoint system associated to the power-law Stokes problem can be found in [48] for a general optimal control framework. Parameter identifications based on this adjoint model are performed in [133] in a glaciological context but they do not carry out sensitivity analyses.

As a preliminary, analytical calculations lead us to an explicit Poiseuille-like solution for the bidimensionnal steady uniform power-law Stokes problem with a basal sliding boundary condition. We then present sensitivity analyses, with respect to the power-law index and the basal sliding coefficient, on two realistic gravity flows : an experimental viscoplastic steady wave and a continental glacier. The explicit velocity field is used as an inflow profile. In the present case, the problem will be treated for a fixed surface, thus providing quasi-static sensitivities of the flow with respect to its input parameters. The numerical results highlight the major contribution of the basal modeling. For the small-scale experimental kaolin wave, we observe the dominant role of the rheological behavior close to the bottom (*i.e.* at high-shear rate); the large scale glacier shows a highly correlated response to the modeling of the bedrock sliding which is an empirical description adjusted by an unmeasurable quantity.

### 4.3 The Fluid Model

We present in this Section the mathematical fluid model which is the incompressible Navier-Stokes system with low Reynolds approximation combined with a power-law constitutive equation. The *Cauchy stress tensor* is expressed by :

$$\underline{\sigma} = -p\underline{Id} + \underline{S} \quad (4.2)$$

where  $\underline{S}$  represents the deviatoric tensor and  $p$  the pressure. It is classical to characterize the rate of strain by the *shear rate*  $\dot{\gamma}$  that corresponds, for a pure shear flow on an horizontal plane bathymetry, to the velocity gradient  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$  (in the euclidian frame  $(x, z)$  and for a corresponding velocity field  $\mathbf{u} = (u_x, u_z)^T$ ). In the general case, the shear rate is a function of the second invariant of the *rate of deformation* tensor :

$$\underline{D} = \underline{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (4.3)$$

Writing  $\mathbf{D}_{(II)}$  this invariant, we obtain :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}(\underline{D} : \underline{D})} = \sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}(\underline{D} \underline{D}^T)} = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{D}_{(II)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\underline{D}\|_F \quad (4.4)$$

where  $\|\cdot\|_F$  represents the Frobenius matrix norm.

The power-law model, first proposed by *Ostwald* in 1925, concerns fluids subject to a variation of the shear stress  $\dot{\tau}$  proportional (with a proportionality constant  $K$ ) to a power of the shear rate  $\dot{\gamma}$  (see *e.g.* [6]) :

$$\dot{\tau} = K\dot{\gamma}^\alpha, \quad \alpha > 0 \quad (4.5)$$

We thus obtain for the apparent viscosity  $\eta$ , defined as the ratio between shear stress and shear rate :

$$\eta = K\dot{\gamma}^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0 \quad (4.6)$$

Then, an exponent  $\alpha < 1$  corresponds to a *shear-thinning* behavior : apparent viscosity decreases when shear rate increases (*e.g.* blood, lava or ice). On the contrary, an exponent  $\alpha > 1$  corresponds to a *shear thickening* behavior : viscosity increases when shear rate increases (*e.g.* corn starch suspensions or certain cement pastes). The case  $\alpha = 1$  corresponds to a Newtonian behavior.

Considering a *power-law constitutive equation*, according to (4.6), writing  $s = \alpha + 1$ , the deviatoric tensor becomes :

$$\underline{S} = \underline{\sigma} + p\underline{Id} = 2\eta_0\|\underline{D}\|_F^{s-2}\underline{D} \quad (4.7)$$

where  $\eta_0 = \frac{K}{\sqrt{2}^{s-2}}$  is the Newtonian apparent viscosity and we set :

$$\eta(\mathbf{u}) = \eta_0 \|\underline{\mathbf{D}}\|_F^{s-2} \quad (4.8)$$

We consider in the sequel a domain of computation  $\Omega_t$  open, bounded and connected in  $\mathbb{R}^2$  with Lipschitz-continuous boundary  $\partial\Omega$ . The conservation of the momentum is described by the Navier-Stokes equation with the low Reynolds number approximation defined on  $\Omega_t$  :

$$-\mathbf{div}(\underline{\sigma}) = f, \in \Omega \quad (4.9)$$

The assumption of *incompressibility* leads to the following mass-conservation equation :

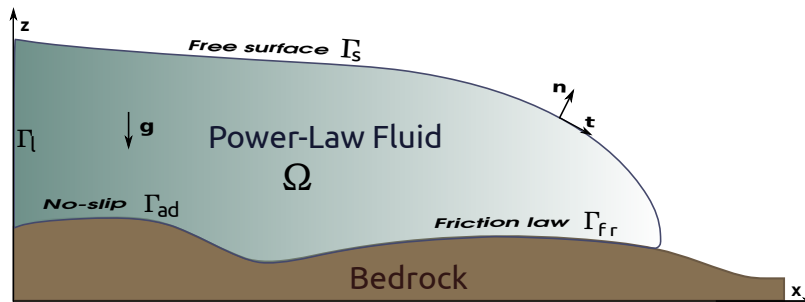
$$\mathbf{div}(\mathbf{u}) = 0, \in \Omega \quad (4.10)$$

where  $\mathbf{u}$  represents the velocity field,  $\rho$  the density and  $f$  an external body force. The following considers bidimensionnal vertical flow in  $(x, z)$  so that  $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$ . It extends naturally, in terms of equations and method, to three dimensions.

For the transient problem, the surface  $\Gamma_s$ , considered to be the graph of a function  $h(x, t)$ , is a free-surface moving in time. Its movement is described by the following monodimensionnal transport equation :

$$\partial_t h + u_x \partial_x h = a + u_z \quad \text{on } \Gamma_s \quad (4.11)$$

with  $\mathbf{u} = (u_x(x, z, t), u_z(x, z, t)) \quad \forall (x, z) \in \Omega_t, t \in [0, T]$  and  $\Omega_t$  is the domain at time  $t$ . A mass-balance at surface is represented by the source term  $a$ . The present study focuses on a free-surface problem at time given fixed, and thus the evolution of the domain with time is not addressed here.



**Figure 4.1:** Typical geometry of a 2D vertical free-surface geophysical flow with a front on a general bedrock and notations.

The boundary  $\partial\Omega$  is divided as follows :

- $\Gamma_s$  is the upper surface (free-surface)
- $\Gamma_b$  is the bottom surface

–  $\Gamma_l$  and  $\Gamma_r$  are lateral open boundaries.

We introduce  $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n})$ , the tangent-normal pair of unit vectors such that :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} \quad (4.12)$$

with :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_{nn}\boldsymbol{n} + \sigma_{n\tau}\boldsymbol{\tau} \quad , \quad \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma_{\tau n}\boldsymbol{n} + \sigma_{\tau\tau}\boldsymbol{\tau} \quad (4.13)$$

One splits the boundary  $\Gamma_b$  into two parts  $\Gamma_{fr}$  and  $\Gamma_{ad}$  corresponding to an homogeneous Dirichlet area ( $u_\tau|_{\Gamma_{ad}} = 0$  ,  $u_n|_{\Gamma_{ad}} = 0$ ) and a basal sliding area (see Figure 4.1). We consider a friction law (also known as linear Weertman-type sliding law, see [172]) on  $\Gamma_{fr}$  :

$$\begin{cases} \sigma_{n\tau} = -\beta u_\tau \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma_b} = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

where  $\beta \geq 0$  is referred to as the basal slipperiness.

The upper-surface  $\Gamma_s$  is subject to a stress-free boundary condition :  $-\underline{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{n}|_{\Gamma_s} = 0$ . The lateral boundary  $\Gamma_l$  is subject to a Neumann boundary condition such as :  $-\underline{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{n}|_{\Gamma_l} = p_l$ . A typical domain is represented on Figure 4.1.

## 4.4 Basic Numerical Procedures

This section presents classical numerical treatments of the quasi-static Stokes problem. We first introduce the variational formulation of problem (4.9)-(4.10) and the corresponding mixed finite element discretization. The solution of the linear case and the treatment of the friction condition are then shortly described followed by the two classical methods applied to solve the nonlinear weak Stokes problem (4.23), that are the fixed point method and the Newton-Raphson method. These basic procedures and formulations as well as the actual drawbacks of the fixed point and the Newton method for the present power-law Stokes problem are required to introduce and elaborate the augmented Lagrangian algorithm **LA**.

### 4.4.1 Mixed Weak Formulation

The variational form of the Stokes problem (4.9)-(4.10) with  $\Omega_t$  given is classical in the Newtonian case and is written as a well-posed mixed variational formulation in well-chosen Hilbert spaces. Hereafter is presented the standard weak formulation of the present power-law Stokes problem (see *e.g.* [10] for the homogeneous Dirichlet case and [61] for more general boundary conditions). Existence and uniqueness results for a given domain  $\Omega$  based on the minimal dissipation form of the problem are recalled. The steady quasi-static Stokes problem is written :



Find  $(\mathbf{u}, p)$  such that

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(\underline{\sigma}) = f & \text{in } \Omega \\ \mathbf{div}(\mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\quad (4.17)$$

with  $\underline{\sigma}$  defined by (4.2).

For notation simplicity, we consider the boundary terms as one integral on a part of the boundary  $\Gamma = \Gamma_r \cup \Gamma_l \subset \partial\Omega$  of a unique surface force  $f_s$  such that :

$$f_s = \begin{cases} p_l & \text{on } \Gamma_l \\ p_r & \text{on } \Gamma_r \end{cases} \quad (4.18)$$

Let us consider a test function  $\varphi \in X_s^0$  with :

$$X_s = (W^{1,s}(\Omega))^2, \quad X_s^0 = \{\varphi, \varphi \in X_s, \varphi = 0 \text{ on } \Gamma_{ad}\} \quad (4.19)$$

where  $s$  is the exponent from the power law (4.7) (where  $1 < s < 2$  stands for shear-thinning and  $s > 2$  for shear-thickening fluid). Then  $X_s$  is a Banach space,  $X_s^0 \subset X_s$  and if  $s = 2$  (Newtonian case),  $X_2$  is the Hilbert space  $H^1$  and  $X_2^0$  is the Hilbert space  $H^1$  with a prescribed Dirichlet boundary condition.

The Green's formula applied to the weak form of the momentum equation (4.16) yields :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{D}(\varphi) \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} f_s \cdot \varphi \, ds + \int_{\Gamma_{fr}} \underline{\sigma} \mathbf{n} \cdot \varphi \, ds = \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in X_s \quad (4.20)$$

where :

$$\int_{\Gamma_{fr}} \underline{\sigma} \mathbf{n} \cdot \varphi \, ds = \int_{\Gamma_{fr}} \sigma_{nn}(\varphi \cdot \mathbf{n}) \, ds + \int_{\Gamma_{fr}} \sigma_{n\tau} \boldsymbol{\tau} \cdot \varphi \, ds = - \int_{\Gamma_{fr}} \beta u_{\tau} \cdot \varphi \, ds \quad (4.21)$$

according to (4.14) and where  $(\underline{\sigma} : \nabla \varphi)$  represents the tensorial scalar product (which is a double contraction) inducing the Frobenius matrix norm  $\|\underline{\sigma}\|_F = \|\underline{\sigma}\|_F^2 = \langle \underline{\sigma}, \underline{\sigma} \rangle_F$ ,  $\underline{\sigma}$  defined by (4.2). Let us define the pressure space  $M_{s^*}$  by :

$$M_{s^*} = L_0^{s^*}(\Omega) = \{q, q \in L^{s^*}(\Omega), \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} = 0\} \quad (4.22)$$

with  $s^*$  the conjugate exponent of  $s$  i.e.  $ss^* = s + s^*$ . Note that  $M_2 = L_0^2$  in the Newtonian case ( $s = 2$ ). We assume in the following that the surface forces  $f_s$  belong  $L^{s^*}(\Gamma)$  to and the volume force  $f$  belongs to  $L^{s^*}(\Omega)$ .

From the expression of the stress tensor (4.2), the mixed weak formulation of the Stokes problem (4.16)-(4.17) is eventually obtained :

$$\begin{cases} \text{Find } (\mathbf{u}, p) \in X_s^0 \times M_{s^*} \text{ such that} \\ a(\eta(\mathbf{u}); \mathbf{u}, \varphi) + b(\varphi, p) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in X_s \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in M \end{cases} \quad (4.23)$$

where :

$$a(\eta(\mathbf{u}); \mathbf{u}, \varphi) = \int_{\Omega} 2\eta(\mathbf{u}) \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) : \underline{\mathbf{D}}(\varphi) \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{fr}} \beta u_{\tau} \cdot \varphi \, ds, \quad (4.24)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}, \quad (4.25)$$

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} f_s \cdot \varphi \, ds. \quad (4.26)$$

From equation (4.7), we define the *internal viscoplastic dissipation potential*  $\mathcal{D}_1$  as follows :

$$\mathcal{D}_1(\underline{\mathbf{D}}) = \frac{2\eta_0}{s} \|\underline{\mathbf{D}}\|_F^s \quad (4.27)$$

where  $s$  comes from (4.7) such that :

$$s = \alpha + 1, \quad s > 1 \quad (4.28)$$

and  $\alpha$  comes from (4.6). The  $\|\cdot\|_F$  is defined by (4.4).

The dissipation potential  $\mathcal{D}_1$  defined by (4.27) represents a *Norton-Hoff* viscoplastic model also called *perfect viscoplasticity*; the lack of a threshold stress (also called yield stress) in the law comes to neglect a possible elastic behavior of the material. The Gâteaux differential of  $\mathcal{D}_1$  leads the following identity :

$$\mathcal{D}'_1 = 2\eta_0 \|\underline{\mathbf{D}}\|_F^{s-2} \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{S}} \quad (4.29)$$

As a consequence, the case of a generic power-law viscous fluid gives for the viscosity  $\eta$  :

$$\eta(\mathbf{u}) = \eta_0 \|\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})\|_F^{s-2} \quad (4.30)$$

If we restrict the space  $X_s^0$  to the space of divergence-free test functions  $X_{s,div}^0$  :

$$X_{s,div}^0 = \left\{ \varphi, \varphi \in X_s^0, \mathbf{div}(\varphi) = 0 \right\} \quad (4.31)$$

The dissipation potential  $\mathcal{D}_1$  being convex with respect to  $\underline{\mathbf{D}}$ , the problem (4.23) is formally equivalent to

$$(P) \begin{cases} \text{Find } \mathbf{u} \in X_{s,div}^0 \text{ such that :} \\ J(\mathbf{u}) = \min_{\varphi \in X_{s,div}^0} J(\varphi) \end{cases} \quad (4.32)$$

where  $J(\cdot)$  is the functional defined by :

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} \mathcal{D}_1(\underline{\mathbf{D}}(\varphi)) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} f_s \cdot \varphi \, ds - \int_{\Gamma_{fr}} \beta u_{\tau} \cdot \varphi \, ds \quad (4.33)$$

with  $\mathcal{D}_1$  defined by (4.27).

From a physical point of view, the formulation (4.32) of the incompressible viscoplastic quasi-static flow model (4.16)-(4.17) corresponds to a standard property of the Stokes equation that is the *minimal dissipation*. Thus, solving problem (P) defined by (4.32) is tantamount to minimizing the viscoplastic rate of energy dissipation  $J(\varphi)$  on the space  $X_{s,div}^0$  of kinematically admissible velocity fields.

**The linear stationary case** The linear stationary problem is described using the classical saddle-point formulation of the Stokes problem (see *e.g.* [138]). Its discrete counterpart is obtained using the standard *Taylor-Hood* ( $P_2 - P_1$ ) finite element. The non-penetration condition (4.15) associated to the friction boundary condition is imposed using a Lagrange multiplier.

There are several ways to solve the resulting linear system. A classical method is to use an *Uzawa algorithm* relaxing the divergence-free constraint and the non-penetration constraint. This type of algorithm is robust and converges well. Another approach consists in obtaining a direct solution of the complete matrix problem using for example the numerical library *MUMPS* (see [3]) through its multifrontal linear system solver. Our numerical experiments showed great efficiency with this last approach.

#### 4.4.2 Classical Solvers and Limitations

**Fixed point method** A classical way to solve the problem (4.23) is to use an iterative Picard algorithm based on a fixed point method.

At each iteration, the assembly of the Stokes linear system has to be performed and solved using, for example, an Uzawa-type algorithm or a direct solver such as *e.g.* the numerical library *MUMPS* [3]. The Picard scheme provides a rate of convergence at best linear, making it a rather slowly convergent algorithm.

**Newton-Raphson method** For the sake of clarity, we skip the boundary terms in the mixed weak problem (4.24)-(4.25). One sets :

$$R_1(\mathbf{u}, p; \varphi) = 2\eta_0 \int_{\Omega} (\|\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})\|_F^{s-2} \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) : \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, d\mathbf{x} \quad (4.34)$$

$$R_2(\mathbf{u}, p; q) = \int_{\Omega} q \, \text{div}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \quad (4.35)$$

The Newton algorithm then writes :

1. Given an initial value  $(u_0, p_0)$
2. For  $k \geq 0$ , determine a correction  $(\delta u_{k+1}, \delta p_{k+1})$  by solving :

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial \mathbf{u}}(u_k, p_k; \varphi) \cdot \delta u_{k+1} + \frac{\partial R_1}{\partial p}(u_k, p_k; \varphi) \cdot \delta p_{k+1} = -R_1(u_k, p_k; \varphi) \\ \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{u}}(u_k, p_k; \varphi) \cdot \delta u_{k+1} + \frac{\partial R_2}{\partial p}(u_k, p_k; \varphi) \cdot \delta p_{k+1} = -R_2(u_k, p_k; \varphi) \end{cases} \quad (4.36)$$

3. Set  $u_{k+1} = u_k - \delta u_{k+1}$  and  $p_{k+1} = p_k - \delta p_{k+1}$

where :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_0, p_0; \varphi) \cdot \delta \mathbf{u} &= 2\eta_0 \int_{\Omega} \|\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}_0)\|_F^{s-2} \langle \underline{\mathbf{D}}(\delta \mathbf{u}), \nabla \varphi \rangle_F d\mathbf{x} \\ + 2\eta_0(s-2) \int_{\Omega} \|\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}_0)\|_F^{s-4} \langle \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}_0), \underline{\mathbf{D}}(\delta \mathbf{u}) \rangle_F \langle \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}_0), \nabla \varphi \rangle_F d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.37)$$

According to equation (4.37), in the shear-thinning case ( $1 < s < 2$ ), the Newton method is ill-posed since the bilinear form is not defined for any constant  $\mathbf{u}_0$  (due to the vanishing of  $\|\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}_0)\|$ ). Then it cannot be theoretically applied (see [62] for similar observations for the solution of the p-Laplacian problem). Beyond this observation, numerical experiments demonstrate a certain ability for the Newton algorithm to reach a converge solution for academic test case (see Section 4.6). However, the radius of its convergence disk is unknown and we observe numerically that the Newton algorithm generally requires a good first-guess obtained from another method such as the fixed point. The required accuracy for the first-guess is unclear and depends, among others, on the value of the power-law index  $s$ . Indeed, in the one-dimensional case, the bilinear form  $\frac{\partial R_1}{\partial u}$  is such that :

$$\frac{\partial R_1}{\partial u}(\varphi, \varphi) = 2\eta_0(s-1)|u'_0|^{s-2}\|\varphi'\|_{L^2}^2 \quad (4.38)$$

Therefore, the bilinear form attached to the Newton-Raphson algorithm degenerates when  $s$  tends to 1, which corresponds to an increase of the shear-thinning behavior of the fluid. Numerical estimations of this limitation for strongly pseudoplastic flows are shown in Section 4.6.

Moreover, the use of these methods (Picard and Newton) to compute an adjoint state based on algorithmic differentiation raises a strong memory issue. Indeed, the evaluation of the adjoint state resulting from an iteratively computed forward state (typically when solving a nonlinear problem) using source code differentiation is obtained by *reverse accumulation* (see [33]). In terms of memory, this procedure leads to store each state the forward iterative solver goes through. It consequently leads to an important memory burden which can be unacceptable for large scale systems

(in particular for parameter identification, see [121] for a detailed description of this memory aspect). We seek hereafter a fast and robust algorithm with small memory consumption in order to solve the power-law Stokes problem in the perspective of extensive finite element adjoint computations.

## 4.5 Four-Field Saddle Point Problem

Following [61], a splitting technique on the *minimal dissipation form* (4.32) is applied to the corresponding variational problem. The splitting consists in introducing the strain-rate tensor  $\underline{D}$  as an unknown. It consequently allows to solve the linear part and the non-linear part of the governing equations sequentially.

This technique applied to the present problem leads to a *four-field saddle point* formulation of the Stokes problem for which we demonstrate the well-posedness. This saddle-point problem is then discretized using a three-field  $P_2 - P_1 - P_1^{disc}$  finite element description. We then build an *augmented Lagrangian type algorithm* in order to solve the four-field saddle-point problem.

The resulting algorithm demonstrates its ability to significantly lessen the computational time compared to the fixed point and the Newton methods. At the same time, the  $P_1$  discontinuous discretization of the strain-rate tensor  $\underline{D}$  considered here leads to solve a diagonal-block linear system at element level. This convenient structure allows to drastically reduce memory needs and is thus particularly interesting in an adjoint-based data assimilation perspective.

Let us point out that in the more general case of viscoplastic behaviors like the Herschel-Bulkley law that include a yield stress, this type of method is suitable for the corresponding non differentiability appearing in the energy functional (see *e.g.* [89]). Then, the following method can be extended to elastic-viscoplastic fluid.

### 4.5.1 Four-Field Saddle-Point Formulation

Let us recall that the model (4.16)-(4.17) is formally equivalent to the minimization problem  $(P)$  defined by (4.32) which admits a unique solution  $(\mathbf{u}, p)$  in  $(X_{s,div}^0 \times M_{s^*})$  (respectively defined by (4.19) and (4.22)). In addition, the existence of the deviatoric stress tensor field  $\underline{S}$  is obtained in the space  $H_{s^*}$  defined by :

$$H_{s^*} = [L^{s^*}(\Omega)]^{2 \times 2} \quad (4.39)$$

Thus, we set :

$$V = \{(\mathbf{u}, \underline{d}) \in [W^{1,s}(\Omega)]^2 \times [L^s(\Omega)]^{2 \times 2}\} \quad (4.40)$$

$$Z = \{(p, \underline{\tau}) \in L^{s^*}(\Omega) \times [L^{s^*}(\Omega)]^{2 \times 2}\} \quad (4.41)$$

and

$$\mathcal{A}_s = (X_s^0 \times H_s) \subset V \quad (4.42)$$

$$\mathcal{B}_{s^*} = (M_{s^*} \times H_{s^*}) \subset Z \quad (4.43)$$

We denote hereafter by  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , the duality product in the corresponding spaces  $X_s^0$ ,  $M_{s^*}$ ,  $H_s$  or  $H_{s^*}$ .

Then, we decompose the functional  $J$  defined by (4.33) as follows :

$$J(\mathbf{u}) = F(\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) + G(\mathbf{u}) \quad (4.44)$$

with  $F : H_s \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $G : X_s^0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  convex, proper (not identically infinite), continuous functions defined by :

$$F(\underline{\mathbf{d}}) = \frac{2\eta_0}{s} \int_{\Omega} \|\underline{\mathbf{d}}\|_F^s d\mathbf{x} \quad (4.45)$$

$$G(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} f_s \cdot \varphi ds - \int_{\Gamma_{fr}} \beta u_{\tau} \cdot \varphi ds \quad (4.46)$$

Using these definitions, the decomposition (4.44) holds. We then define  $W \subset \mathcal{A}_s$  by :

$$W = \{(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A}_s, \text{div}(\mathbf{u}) = 0, \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) - \underline{\mathbf{d}} = 0\} \quad (4.47)$$

with  $\underline{\mathbf{D}}$  defined by (4.3). Then, problem (P) defined by (4.32) is formally equivalent to :

$$(\Pi) \begin{cases} \text{Find } (\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*) \in W \text{ such that :} \\ j(\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*) = \min_{(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in W} j(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \end{cases} \quad (4.48)$$

where :

$$j(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) = F(\underline{\mathbf{d}}) + G(\mathbf{u}) \quad (4.49)$$

Problem (Π) introduces a new variable  $d$  and a new constraint :

$$\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) - \underline{\mathbf{d}} = 0 \quad (4.50)$$

The decomposition-coordination method developed in [61] as applied to the present fluid model, is based on the *equivalency* between Problem (P) and Problem (Π). For the sake of simplicity, we consider in the sequel only zero boundary terms, that is to say :  $f_s = 0$ ,  $f_s$  defined by (4.18) and  $\beta = 0$ ,  $\beta$  defined by (4.14) so that equation (4.46) reduces to :

$$G(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} \quad (4.51)$$

Nevertheless, the extension to general boundary condition simulations is natural and numerical computations with Neumann and friction boundary conditions are presented in section 4.6.3.

**Saddle-point formulation of problem (Π)** Let us introduce the functional  $\mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\boldsymbol{\tau}}))$  defined on  $(\mathcal{A}_s \times \mathcal{B}_{s^*})$  by :

$$\mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\boldsymbol{\tau}})) = j(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) - \langle p, \text{div}(\mathbf{u}) \rangle + \langle \underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) - \underline{\mathbf{d}} \rangle \quad (4.52)$$

The functional  $\mathcal{L}$  corresponds to the Lagrangian of the problem (Π) defined by (4.48) with respect to the two equality constraints (4.17) and (4.50).

### 4.5.2 Existence and Uniqueness of the Saddle-Point

The duality framework of the saddle-point formulation is presented below. On the one hand, using a duality theorem, we ensure existence of a saddle-point for the four-field Lagrangian defined by (4.52) in the Banach space  $\mathcal{A}_s \times \mathcal{B}_{s^*}$ . On the other hand, from the existence of the saddle-point and the existence and uniqueness of the solution of the minimization problem (P), the uniqueness of the pair  $(\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*)$  of the saddle-point of the Lagrangian (4.52) is ensured but not the uniqueness of the Lagrange multipliers part  $(p^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}^*)$ .

Let us consider  $\mathcal{L} : (\mathcal{A}_s \times \mathcal{B}_{s^*}) \rightarrow \mathbb{R}$  defined by (4.52). For  $(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A}_s$  and  $(p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \in \mathcal{B}_{s^*}$ , one sets :

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) = \sup_{(p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \in \mathcal{B}_{s^*}} \mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\boldsymbol{\tau}})) \quad (4.53)$$

$$\mathcal{G}(p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) = \inf_{(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A}_s} \mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\boldsymbol{\tau}})) \quad (4.54)$$

One defines then the *primal problem* :

$$\inf_{(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A}_s} \mathcal{J}(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \quad (4.55)$$

and the *dual problem* :

$$\sup_{(p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \in \mathcal{B}_{s^*}} \mathcal{G}(p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \quad (4.56)$$

In this context, a *duality theorem* is recalled :

**Theorem 1** (see [44] p.164) *Let  $V$  and  $Z$  be two reflexive Banach spaces. We assume that :*

$$\mathcal{A}_s \subset V \text{ is convex, closed, non empty} \quad (4.57)$$

$$\mathcal{B}_{s^*} \subset Z \text{ is convex, closed, non empty} \quad (4.58)$$

*We assume as well that the functional  $\mathcal{L} : \mathcal{A}_s \times \mathcal{B}_{s^*} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfies :*

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A}_s, (p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \mapsto \mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\boldsymbol{\tau}})) \\ \text{is concave upper semi-continuous} \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\forall (p, \underline{\tau}) \in \mathcal{B}_{s^*}, (\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \mapsto \mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\tau}))$$

*is convex lower semi-continuous*

(4.60)

We also requires that :

$$\begin{aligned} & \exists (p_0, \tau_0) \in \mathcal{B}_{s^*} \text{ such that :} \\ & \lim_{\substack{(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A}_s \\ \|(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}})\| \rightarrow \infty}} \mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p_0, \underline{\tau}_0)) = +\infty \end{aligned}$$
(4.61)

and

$$\lim_{\substack{(p, \underline{\tau}) \in \mathcal{B}_{s^*} \\ \|(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}})\| \rightarrow \infty}} \inf_{(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A}_s} \mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\tau})) = -\infty$$
(4.62)

Then,  $\mathcal{L}$  admits at least one saddle-point  $((\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*), (p^*, \underline{\tau}^*))$  on  $\mathcal{A}_s \times \mathcal{B}_{s^*}$  which satisfies :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*); (p^*, \underline{\tau}^*)) &= \min_{(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A}_s} \sup_{(p, \underline{\tau}) \in \mathcal{B}_{s^*}} \mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\tau})) \\ &= \max_{(p, \underline{\tau}) \in \mathcal{B}_{s^*}} \inf_{(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A}_s} \mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\tau})) \end{aligned}$$
(4.63)

**Proposition 2** With  $\mathcal{A}_s$  and  $\mathcal{B}_{s^*}$  respectively defined by (4.42) and (4.43) and  $\mathcal{L}$  defined by (4.52), there exists a saddle-point  $((\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*); (p^*, \underline{\tau}^*)) \in \mathcal{A}_s \times \mathcal{B}_{s^*}$  which satisfies (4.63).

**Proof** Spaces  $L^p$  and  $W^{1,p}$  are uniformly convex for  $1 < p < \infty$ . A cartesian product of uniformly convex Banach spaces being uniformly convex,  $\mathcal{A}_s$  and  $\mathcal{B}_{s^*}$  are uniformly convex (see e.g [1]). The space  $\mathcal{A}_s$  (resp.  $\mathcal{B}_{s^*}$ ) being a complete subspace of a metric space  $V$  (resp.  $Z$ ),  $\mathcal{A}_s$  (resp.  $\mathcal{B}_{s^*}$ ) is *closed*. Then hypothesis (4.57) and (4.58) holds.

Besides,  $\mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\tau}))$  defined by (4.52) is convex with respect to  $(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}})$  from the strict convexity of the function  $F(\underline{\mathbf{d}})$  and the linearity of the other terms, and linear with respect to  $(p, \underline{\tau})$  and then concave. Moreover,  $\mathcal{L}$  is Gâteaux-differentiable with respect to each variable and subsequently *continuous*, hence satisfying hypothesis (4.59) and (4.60).

We recall the complete expression of the Lagrangian :

$$\mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\tau})) = \frac{2\eta_0}{s} \int_{\Omega} \|\underline{\mathbf{d}}\|_F^s \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \langle p, \mathbf{div}(\mathbf{u}) \rangle + \langle \tau, \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) - \underline{\mathbf{d}} \rangle$$
(4.64)

**Proof of hypothesis (4.61)** One chooses  $(p_0, \underline{\tau}_0)$  such that :

$$-\mathbf{div}(\underline{\tau}_0) + \nabla p_0 = \mathbf{f}$$
(4.65)



The weak form of (4.65) becomes :

$$\int_{\Omega} -\mathbf{div}(\underline{\boldsymbol{\tau}}_0) \cdot \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p_0 \cdot \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \cdot \varphi, \quad \forall \varphi \in X_s^0 \quad (4.66)$$

Using integration by part this expression becomes :

$$\int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\tau}}_0 : \underline{\mathbf{D}}(\varphi) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p_0 \mathbf{div}(\varphi) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f \cdot \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in X_s^0 \quad (4.67)$$

Since  $\mathbf{u} \in X_s^0$ , we have :

$$\mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p_0, \underline{\boldsymbol{\tau}}_0)) = \frac{2\eta_0}{s} \int_{\Omega} \|\underline{\mathbf{d}}\|_F^s \, d\mathbf{x} - \langle \underline{\boldsymbol{\tau}}_0, \underline{\mathbf{d}} \rangle \quad (4.68)$$

The proper, continuous and convex ( $s > 1$ ) functional  $f(\underline{\mathbf{d}})$  is defined by :

$$f(\underline{\mathbf{d}}) = \int_{\Omega} \|\underline{\mathbf{d}}\|_F^s \, d\mathbf{x} = \|\underline{\mathbf{d}}\|_{H_s}^s \quad (4.69)$$

We thus obtain :

$$\lim_{\|\underline{\mathbf{d}}\|_{H_s} \rightarrow \infty} \frac{f(\underline{\mathbf{d}})}{\|\underline{\mathbf{d}}\|_{H_s}} = \lim_{\|\underline{\mathbf{d}}\|_{H_s} \rightarrow \infty} \|\underline{\mathbf{d}}\|_{H_s}^{s-1} = +\infty \quad (4.70)$$

hence the *strong coercivity* (or *supercoercivity*) on  $f$ .

We also consider the proper, continuous and linear functional  $g(\underline{\mathbf{d}}) : H_s \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  defined by :

$$g(\underline{\mathbf{d}}) = - \langle \underline{\boldsymbol{\tau}}_0, \underline{\mathbf{d}} \rangle \quad (4.71)$$

From the continuity of  $g$ , one can deduce :

$$g(\underline{\mathbf{d}}) \geq -C \|\underline{\mathbf{d}}\|_{H_s} \quad (4.72)$$

Then,

$$\frac{f(\underline{\mathbf{d}}) + g(\underline{\mathbf{d}})}{\|\underline{\mathbf{d}}\|_{H_s}} \geq \|\underline{\mathbf{d}}\|_{H_s}^{s-1} - C \xrightarrow{\|\underline{\mathbf{d}}\|_{H_s} \rightarrow \infty} +\infty \quad (4.73)$$

from what we deduce the supercoercivity of  $\mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p_0, \underline{\boldsymbol{\tau}}_0))$  :

$$\lim_{\substack{(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A}_s \\ \|\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}\| \rightarrow \infty}} \mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p_0, \underline{\boldsymbol{\tau}}_0)) = +\infty \quad (4.74)$$

Therefore, hypothesis (4.61) holds.

**Proof of hypothesis (4.62)** Let us consider the pair  $(\mathbf{u}_0, \underline{\mathbf{d}}_0)$  such that  $\mathbf{div}(\mathbf{u}_0) = 0$  and  $\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}_0) = \underline{\mathbf{d}}_0$ . One gets :

$$\mathcal{L}((\mathbf{u}_0, \underline{\mathbf{d}}_0); (p, \underline{\boldsymbol{\tau}})) = \frac{2\eta_0}{s} \int_{\Omega} \|\underline{\mathbf{d}}_0\|_F^s d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{u}_0 d\mathbf{x}, \quad \forall (p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \in \mathcal{B}_{s^*} \quad (4.75)$$

from what we deduce :

$$\inf_{(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A}_s} \mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\boldsymbol{\tau}})) = -\infty \quad (4.76)$$

Then, hypothesis (4.62) holds.

Finally,  $\mathcal{L}$  defined by (4.52) satisfies every hypothesis of Theorem 1 and the duality theorem holds.

**About the uniqueness of the saddle-point** The functional  $\mathcal{J}(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}})$  minimized in the primal problem (4.55) corresponds, under equality constraints (4.17) and (4.50), to the functional  $j(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}})$  defined by (4.49). The primal problem (4.55) related to the Lagrangian then corresponds to the minimization problem (II) defined by (4.48) which admits a unique minimum  $(\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*)$ .

Moreover, according to (4.63),  $\mathcal{G}(p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \leq \mathcal{J}(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}})$ ,  $\forall (\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A}_s$ . We deduce that :

$$\mathcal{G}(p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \leq \mathcal{J}(\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*) = \mathcal{G}(p^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}^*), \quad \forall (p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \in \mathcal{B}_{s^*} \quad (4.77)$$

It amounts to saying that  $(p^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}^*)$  is a maximum of  $\mathcal{G}$ . It implies that the domain of the dual problem (4.56) is not empty; nevertheless, the dual problem does not have a unique solution *a priori* due to the linearity of the functional  $(p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \mapsto \mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\boldsymbol{\tau}}))$ . Thus  $\mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\boldsymbol{\tau}}))$  does not have *a priori* a unique saddle-point.

The functional spaces used for the previous continuous development depend on the rheological exponent  $s$ . Consequently, if  $s \neq 2$ , these functional spaces are not Hilbert spaces. In principle, if  $s \neq 2$ , the augmented Lagrangian approach discussed in [60] does not apply to these non- Hilbertian situations. It applies however to those finite dimensional spaces obtained by the finite element approximation of the continuous problem. In the sequel, we set  $X^0 = X_2^0$ ,  $M = M_2$  and  $H = H_2$  and consequently  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$  and  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_2$  (defined respectively by (4.19), (4.22), (4.39), (4.40) and (4.43)).

### 4.5.3 Characterization of the saddle-point

The saddle-point existence result allows to characterize the solution as follows :

**Proposition 3** (see e.g.[44]) Assuming hypothesis (4.57)-(4.60) and using the Gâteaux differentiability of  $\mathcal{L}$  with respect to  $(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}})$  and  $(p, \underline{\boldsymbol{\tau}})$ , the existence of the saddle-point  $((\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*); (p^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}^*))$  is equivalent to :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}})}((\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*); (p^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}^*)), (\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) - (\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*) \right\rangle \geq 0, \quad \forall (\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in \mathcal{A} \quad (4.78)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(p, \underline{\boldsymbol{\tau}})}((\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*); (p^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}^*)), (p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) - (p^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}^*) \right\rangle \leq 0, \quad \forall (p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \in \mathcal{B} \quad (4.79)$$

This proposition characterizes the saddle-point using *elliptic variational inequalities (EVI)* of second kind. Using the Gâteaux differentiability of the Lagrangian, these EVIs corresponds, in fact, to vanishing Lagrangian gradients with respect to the unknowns and the Lagrange multipliers. The existence of the saddle-point  $((\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*); (p^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}^*))$  is then equivalent to :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}})}((\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*); (p^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}^*)) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(p, \underline{\boldsymbol{\tau}})}((\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*); (p^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}^*)) = 0 \end{cases} \quad (4.80)$$

where the derivative with respect to the unknowns represents the necessary optimality condition and the derivative with respect to the Lagrange multiplier represents the constraints.

The second equation of system (4.80) yields :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \cdot \delta p = - \langle \mathbf{div}(\mathbf{u}), \delta p \rangle = 0, \quad \forall \delta p \in M \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\tau}} = \langle \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) - \underline{\mathbf{d}}, \delta \underline{\boldsymbol{\tau}} \rangle = 0, \quad \forall \delta \underline{\boldsymbol{\tau}} \in H \quad (4.82)$$

It corresponds to the two constraints (4.17) and (4.50) of Problem (II) defined by (4.48). The first equation of system (4.80) yields :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} = - \int_{\Omega} f \cdot \delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \langle p, \mathbf{div}(\delta \mathbf{u}) \rangle + \langle \underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{D}}(\delta \mathbf{u}) \rangle = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in X^0 \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\mathbf{d}}} \cdot \delta \underline{\mathbf{d}} = 2\eta_0 \int_{\Omega} (\|\underline{\mathbf{d}}\|_H^{s-2} \langle \underline{\mathbf{d}}, \delta \underline{\mathbf{d}} \rangle) \, d\mathbf{x} - \langle \underline{\boldsymbol{\tau}}, \delta \underline{\mathbf{d}} \rangle = 0, \quad \forall \delta \underline{\mathbf{d}} \in H \quad (4.84)$$

The last two equations can be written as the following coupled system :

$$\begin{cases} \langle \nabla p, \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\boldsymbol{\tau}}, \delta \mathbf{u} \rangle = \langle f, \delta \mathbf{u} \rangle, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in X^0 \\ \langle 2\eta_0 \|\underline{\mathbf{d}}\|_H^{s-2} \underline{\mathbf{d}}, \delta \underline{\mathbf{d}} \rangle = \langle \underline{\boldsymbol{\tau}}, \delta \underline{\mathbf{d}} \rangle, \quad \forall \delta \underline{\mathbf{d}} \in H \end{cases} \quad (4.85)$$

where  $\underline{\mathbf{D}}^*$  represents the adjoint operator of the rate of deformation tensor  $\underline{\mathbf{D}}$  :

$$\langle \underline{\mathbf{D}}^* \xi, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \xi : \underline{\mathbf{D}}(\varphi) \, d\mathbf{x}, \quad \xi \in H \quad (4.86)$$

The second equation of the system (4.85) corresponds to the weak form of the rheological law (4.7) :

$$\langle 2\eta_0 \|\underline{\mathbf{d}}\|_H^{s-2} \underline{\mathbf{d}}, \delta \underline{\mathbf{d}} \rangle = \langle \underline{\boldsymbol{\tau}}, \delta \underline{\mathbf{d}} \rangle, \forall \delta \underline{\mathbf{d}} \in H \quad (4.87)$$

**Lemma 4** *In the case of a zero boundary term (i.e.  $f_s = 0$ ,  $f_s$  defined by (4.18) and  $\beta = 0$ ,  $\beta$  defined by (4.14)), the adjoint operator  $\mathbf{D}^*$  of the rate of deformation tensor  $\underline{\mathbf{D}}$  applied to a tensor  $\mathbf{T}$  is the opposite of the  $\mathbf{div}$  operator applied to the symmetrical part of  $\mathbf{T}$  :*

$$\mathbf{D}^*(\mathbf{T}) = -\mathbf{div} \left( \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) \right) \quad (4.88)$$

**Proof** : this property is easily deduced from the classical property of the adjoint operator of the gradient operator.

**Remark 1** *The image of the symmetric tensor  $\underline{\mathbf{S}}$  by  $\mathbf{D}^*$  is :*

$$\mathbf{D}^*(\underline{\mathbf{S}}) = -\mathbf{div}(\underline{\mathbf{S}}) \quad (4.89)$$

*in the case of a zero boundary term. This result is actually sufficient for any boundary term if one considers a discontinuous discretization for the tensorial unknowns such as the one considered in Section 4.5.5 ; indeed discontinuous degrees of freedom do not appear on the boundaries and no boundary condition applies on the resulting linear system.*

**Proposition 5** *The tensorial Lagrange multiplier  $\underline{\boldsymbol{\tau}}$  corresponds to the extra-stress tensor  $\underline{\mathbf{S}}$  and the scalar Lagrange multiplier  $p$  to the pressure field.*

**Proof** : From Lemma 4, we rewrite the first equation of the system (4.85) as follows :

$$\langle -\mathbf{div} \left( \frac{1}{2}(\underline{\boldsymbol{\tau}} + \underline{\boldsymbol{\tau}}^T) \right), \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \nabla p, \delta \mathbf{u} \rangle = \langle f, \delta \mathbf{u} \rangle, \forall \delta \mathbf{u} \in X^0 \quad (4.90)$$

And yet, there exists a unique field  $(\mathbf{u}, p) \in (X_{div}^0 \times H)$  solution of the momentum equation of the Stokes problem such that

$$-\mathbf{div}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}, p)) = -\mathbf{div}(\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{u})) + \nabla p = f \quad (4.91)$$

Thus, according to (4.91), the tensor  $\underline{\boldsymbol{\tau}}$  represents the extra-stress tensor  $\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{u})$  (which is symmetric) :

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = \underline{\mathbf{S}}(\mathbf{u}) \quad (4.92)$$

and the scalar field  $p$  corresponds to the Stokes pressure field.

We develop hereafter an augmented Lagrangian algorithmic approach in order to solve the well-posed four-field saddle point problem (4.63) derived in this section.

#### 4.5.4 $LA$ and $LA\theta$ algorithms

Two augmented Lagrangian algorithms, called  $LA$  and  $LA\theta$  well-suited for the four-field saddle-point problem (4.63) are built. This type of algorithm is a regularized version of the Uzawa algorithm which is a duality-based algorithm that uses the good properties of the dual problem (4.56) (see *e.g.* [2]). A quadratic regularization term (linked to the Moreau-Yosida regularization) is added to the Lagrangian  $\mathcal{L}$  with respect to the constraints of the problem, bringing a new functional called *augmented Lagrangian*, denoted  $\mathcal{L}_r$ . This functional has the same saddle-point as the initial Lagrangian, for all  $r \geq 0$ , and its associated dual function  $\mathcal{G}_r(p, \underline{\tau})$  has a better conditionning.

The additional terms in the Lagrangian  $\mathcal{L}$  defined by (4.52) yields the following *augmented Lagrangian*  $\mathcal{L}_r$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\tau})) &= \mathcal{L}((\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}); (p, \underline{\tau})) \\ &+ \frac{r}{2} \int_{\Omega} |\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) - \underline{\mathbf{d}}|^2 d\mathbf{x} + \frac{r}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{div}(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Then, an Uzawa algorithm is built with respect to  $\mathcal{L}_r$  providing the following *augmented Lagrangian algorithm* :

Let  $(p^0, \tau^0)$  be given. For  $n \geq 0$ , solve :

$$\begin{cases} -r(\mathbf{D}^* \underline{\mathbf{D}}(u^n) - \nabla(\mathbf{div} u^n)) &= -f + \mathbf{D}^*(\tau^n) + \nabla p^n - r\mathbf{D}^*(d^n) \\ 2\eta_0 |d^n|^{s-2} d^n + r d^n &= r \underline{\mathbf{D}}(u^n) + \tau^n \end{cases} \quad (4.94)$$

$$p^{n+1} = p^n - \rho(\mathbf{div} u^n) \quad (4.95)$$

$$\tau^{n+1} = \tau^n + \rho(\underline{\mathbf{D}}(u^n) - d^n) \quad (4.96)$$

The main difficulty of the classical augmented Lagrangian algorithm lies in the solution of the coupled system (4.94). To overcome this issue, following [60], we shall consider a *block relaxation method* which consists in solving the system with two steps. To do so the unknown  $d^n$  is replaced by  $d^{n-1}$  in the first equation of system (4.94).

In practice, the block-relaxed version of the algorithm shows difficulties to reach a converged solution, due to the competition between the different terms coming from the two constraints in the resulting linear system of the first equation of system (4.94). To improve the behavior of the resolution of this equation, an idea is to split it into two resolutions by considering the pressure as an unknown. Thus we eventually replace the first equation of (4.94) by the following system :

$$\begin{cases} -r\mathbf{D}^* \underline{\mathbf{D}}(u^n) - \nabla p^n = -f + \mathbf{D}^*(\tau^n) - r\mathbf{D}^*(d^{n-1}) \\ \mathbf{div}(u^n) = 0 \end{cases} \quad (4.97)$$

Once the system (4.97) is assembled, we can build an inner augmented Lagrangian algorithm to solve it. Thus, the satisfaction of the two constraints occurs sequentially.

**Solution of the nonlinear equation** The second equation of the system (4.94) is non-linear due to the term  $|d^n|^{s-2}$ . One takes the norm on both sides of the equality (see [61]) to obtain :

$$\left| 2\eta_0 |d^n|^{s-2} + r \right| |d^n| = |r \underline{\mathbf{D}}(u^n) + \tau^n| \quad (4.98)$$

which is, for  $r > 0$  and  $2\eta_0 |d^n|^{s-2} > 0$ , equal to :

$$2\eta_0 |d^n|^{s-1} + r |d^n| = |r \underline{\mathbf{D}}(u^n) + \tau^n| \quad (4.99)$$

This equation is a one variable nonlinear equation that we can solve by a Newton algorithm. Once this equation is solved, the value of  $|d^n|$  is known and the non-linear equation becomes a standard linear system .

**Algorithm LA** The block-relaxation method combined with the uncoupled satisfaction of the constraints (see equation (4.97)) on the one hand and the Newton method applied to the equation (4.99) on the other hand finally yields the following algorithm :

**LA :** Let  $(d^0, p^1, \tau^1)$  be given. For  $n \geq 1$ , solve :

$$\begin{cases} -r \mathbf{D}^* \underline{\mathbf{D}}(u^n) - \nabla p^n = -f + \mathbf{D}^*(\tau^n) - r \mathbf{D}^*(d^{n-1}) \\ \mathbf{div}(u^n) = 0 \end{cases} \quad (4.100)$$

For  $|d^n|_0$  given,  $\mathbf{k} \geq 0$ , compute :

$$|d^n|_{\mathbf{k}+1} = |d^n|_{\mathbf{k}} - \frac{2\eta_0 |d^n|_{\mathbf{k}}^{s-1} + r |d^n|_{\mathbf{k}} - |r \underline{\mathbf{D}}(u^n) + \tau^n|}{(s-1)2\eta_0 |d^n|_{\mathbf{k}}^{s-2} + r} \quad (4.101)$$

For  $|d^n|$  be given, solve :

$$2\eta_0 |d^n|^{s-2} d^n + r d^n = r \underline{\mathbf{D}}(u^n) + \tau^n \quad (4.102)$$

Update the Lagrange multiplier :

$$\tau^{n+1} = \tau^n + \rho(\underline{\mathbf{D}}(u^n) - d^n) \quad (4.103)$$

Our numerical experiments show that the best performance are obtained using  $\rho = r$ ,  $\rho$  coming from the Uzawa algorithm and  $r$  being the parameter of the augmented Lagrangian.

**Algorithm  $\mathbf{LA}\theta$**  A  $\theta$  version of  $\mathbf{LA}$  algorithm is elaborated, following an idea of [61] applied to the present variationnal problem. The equivalence theory between augmented Lagrangian and alternating-direction methods applied to the dual problem can lead to an augmented Lagrangian interpretation of the  $\theta$ -scheme. Setting  $\rho = r$ , the resulting algorithm  $\mathbf{LA}\theta$  writes :

$\mathbf{LA}\theta : (p^0, \tau^0)$  given. For  $n \geq 0$ ,  $\theta \in [0; \frac{1}{2}]$ , we solve :

$$2\eta_0 |d^n|^{s-2} d^n + r\theta d^n = r\theta \underline{\mathbf{D}}(u^n) + \tau^n \quad (4.104)$$

$$\begin{cases} -r\theta \mathbf{D}^* \underline{\mathbf{D}}(u^{n+\theta}) - \nabla p^{n+\theta} = -f + \mathbf{D}^*(\tau^n) - r\theta \mathbf{D}^*(d^n) \\ \mathbf{div}(u^{n+\theta}) = 0 \end{cases} \quad (4.105)$$

$$\tau^{n+\theta} = \tau^n + r\theta(\underline{\mathbf{D}}(u^{n+\theta}) - d^n) \quad (4.106)$$

$$(2\eta_0 |d^{n+1-\theta}|^{s-2} + r(1-2\theta))d^{n+1-\theta} = r(1-2\theta)\underline{\mathbf{D}}(u^{n+\theta}) + \tau^{n+\theta} \quad (4.107)$$

$$\tau^{n+1-\theta} = \tau^{n+\theta} + r(1-2\theta)(\underline{\mathbf{D}}(u^{n+\theta}) - d^{n+1-\theta}) \quad (4.108)$$

$$\begin{cases} -r\theta \mathbf{D}^* \underline{\mathbf{D}}(u^{n+1}) - \nabla p^{n+1} = -f + \mathbf{D}^*(\tau^{n+1-\theta}) - r\theta \mathbf{D}^*(d^{n+1-\theta}) \\ \mathbf{div}(u^{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (4.109)$$

$$\tau^{n+1} = \tau^{n+1-\theta} + r\theta(\underline{\mathbf{D}}(u^{n+1}) - d^{n+1-\theta}) \quad (4.110)$$

This algorithm  $\mathbf{LA}\theta$  solves equations (4.100) and (4.102) twice per iteration. Thus, in terms of computational time,  $\mathbf{LA}\theta$  is naturally twice as much expensive. Performances strongly depend on the values of  $\theta$  and  $r$  and no convergence result exists yet. But, as we will see in Section 4.6 and Table 4.2,  $\mathbf{LA}\theta$  proves to be more efficient than  $\mathbf{LA}$  for proper values of  $\theta$  and  $r$ .

Let us point out that the derivation of both algorithms has been done in two dimensions but it naturally extends to the three-dimensional case.

#### 4.5.5 Finite element discretization

Let  $\gamma$  and  $\delta$  being two bilinear forms defined by :

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}; \mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*) &= \frac{r}{2} \left( \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) : (\underline{\mathbf{d}}^* - \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}^*)) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \mathbf{div}(\mathbf{u}) \mathbf{div}(\mathbf{u}^*) \, d\mathbf{x} \right) \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\delta(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}; p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) = \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\tau}} : (\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) - \underline{\mathbf{d}}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \mathbf{div}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \quad (4.112)$$

Then  $(\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*; p^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}^*) \in (X \times H \times M \times H)$  is a saddle-point of  $\mathcal{L}_r$  (defined by (4.93)) if and only if :

$$\begin{cases} F(\underline{\mathbf{d}}) - F(\underline{\mathbf{d}}^*) + G(\mathbf{u}) - G(\mathbf{u}^*) + \gamma(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{d}}^*; \mathbf{u} + \mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}} + \underline{\mathbf{d}}^*) \\ + \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{d}}^*; p^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}^*) \geq 0, \quad \forall (\mathbf{u}, \underline{\mathbf{d}}) \in X \times H \\ \delta(\mathbf{u}^*, \underline{\mathbf{d}}^*; p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) = 0, \quad \forall (p, \underline{\boldsymbol{\tau}}) \in M \times H \end{cases} \quad (4.113)$$

with  $F(\underline{\mathbf{d}})$  and  $G(\mathbf{u})$  defined respectively by (4.45) and (4.46).

We introduce the following finite dimensional spaces  $X_h \subset X$ ,  $H_h \subset H$ ,  $M_h \subset M$ . The discrete counterpart of the saddle-point problem then writes :

$$\begin{aligned} &\text{Find } (\mathbf{u}_h^*, \underline{\mathbf{d}}_h^*; p_h^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}_h^*) \in (X_h \times D_h \times M_h \times T_h) \text{ such that :} \\ &\begin{cases} F(\underline{\mathbf{d}}_h) - F(\underline{\mathbf{d}}_h^*) + G(\mathbf{u}_h) - G(\mathbf{u}_h^*) + \gamma(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^*, \underline{\mathbf{d}}_h - \underline{\mathbf{d}}_h^*; \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h^*, \underline{\mathbf{d}}_h + \underline{\mathbf{d}}_h^*) \\ + \delta(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^*, \underline{\mathbf{d}}_h - \underline{\mathbf{d}}_h^*; p_h^*, \underline{\boldsymbol{\tau}}_h^*) \geq 0, \quad \forall (\mathbf{u}_h, \underline{\mathbf{d}}_h) \in X_h \times H_h \\ \delta(\mathbf{u}_h^*, \underline{\mathbf{d}}_h^*; p_h, \underline{\boldsymbol{\tau}}_h) = 0 \quad \forall (p_h, \underline{\boldsymbol{\tau}}_h) \in M_h \times H_h \end{cases} \end{aligned} \quad (4.114)$$

In order for the solution  $\mathbf{u}_h$  not to depend upon the parameter  $r > 0$ , it is necessary and sufficient for the finite element spaces to satisfy  $H_h = \underline{\mathbf{D}}(X_h)$ . On the contrary, the resulting term of the augmentation would not vanish when the constraint  $\underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u})$  is satisfied.

No numerical analysis has been written for the present formulation. Let  $\Omega_h$  be a triangulation of the domain  $\Omega$ . We choose the Taylor-Hood spaces for the velocity-pressure pair  $(\mathbf{u}, p)$  :

$$X_h = \{\varphi \in X \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), v|_K \in P_2(K)^2, \forall K \in \Omega_h\} \quad (4.115)$$

$$M_h = \{q \in M \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), q|_K \in P_1(K), \forall K \in \Omega_h\} \quad (4.116)$$

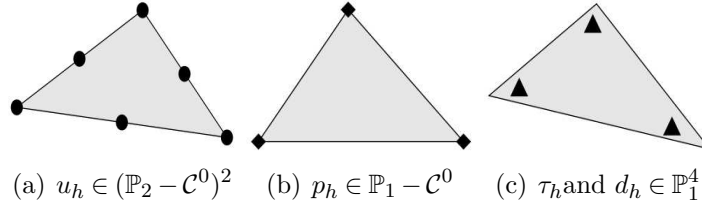
Next, we naturally define the following symmetrical tensor space :

$$H_h = \{\xi \in H, \xi|_K \in P_1(K)^3, \forall K \in \Omega_h\} \quad (4.117)$$

This triple extends the well-known *Taylor-Hood* finite element pair which is suitable for the classical two-field formulation of the power-law Stokes problem and the discontinuous piecewise linear function space  $H_h$  is such that  $H_h = \underline{\mathbf{D}}(X_h)$ .

In other respect, as proved by [154] this triple uniquely defines (in the sense of inf-sup condition) the solution of a three-field formulation of the power-law Stokes problem first introduced in [11] in the case  $1 < s < 2$ .





**Figure 4.2:** Extended Taylor-Hood mixed finite elements

We plot on Figure 4.2 the corresponding triangular finite elements triple.

Again, the extension to the three-dimensional case is natural if one considers tetrahedral finite-elements; the corresponding finite element triple is identically referred as the  $(P_2, P_1, P_1^{disc})$  and corresponds respectively to the 9 nodes tetrahedron and the continuous and discontinuous 4 nodes ones.

We also recall that, using this discretization, all the boundary terms are applied to the velocity-pressure equation (4.100).

## 4.6 Performances of $LA$ and $LA\theta$ Algorithms

This section is dedicated to the numerical assessment of  $LA$  and  $LA\theta$  performances in terms of CPU time and memory consumption compared to the fixed point and the Newton methods. We use a sequence of increasingly finer (quasi-uniform) meshes for various power-law exponents. The meshes dimensions in terms of  $P_2$ ,  $P_1$  and  $P_1^{disc}$  degrees of freedom and the corresponding sizes for the Stokes system and the tensorial system are given in Table 4.1.

Comparisons are carried out on a bidimensional analytical test case and results for a realistic simulation with general boundary conditions are finally presented.

### 4.6.1 Convergence curves

The following solution  $(\mathbf{u}^a, p^a)$  is considered on the unit square  $\Omega$  ( $1 \times 1$ ) :

$$\begin{pmatrix} u_x^a(x, z) \\ u_z^a(x, z) \\ p^a(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(m\pi x)^3 \sin(m\pi z)^2 \cos(m\pi z) \\ -\sin(m\pi x)^2 \sin(m\pi z)^3 \cos(m\pi x) \\ \sin(n\pi x) \sin(n\pi z) \end{pmatrix} \quad (4.118)$$

It is kinematically admissible ( $\mathbf{div}(\mathbf{u}^a) = 0$ ). Then, the problem (4.23) is solved against  $l(\varphi)$  defined by :

$$l(\varphi) = a(\eta(\mathbf{u}^a); \mathbf{u}^a, \varphi) + b(\varphi, p^a) \quad (4.119)$$

for the case  $m = 1$  and  $n = 2$  (see (4.118)).

Convergence curves are plotted on Figure 4.3 in order to validate the method and to obtain estimates for the orders of convergence.

From the explicit solution (4.118), one computes the error norms  $E_{L^s}(\mathbf{u})$ ,  $E_{W^{1,s}}(\mathbf{u})$ ,  $E_{L^s}(\underline{\mathbf{d}})$ ,  $E_{L^{s*}}(p)$  and  $E_{L^{s*}}(\underline{\boldsymbol{\tau}})$  where :

$$E_{L^q}(\varphi) = \|\varphi - \varphi_h\|_{L^q} = \left( \int_{\Omega} |\varphi - \varphi_h|^q \right)^{1/q} \quad (4.120)$$

$$E_{W^{1,s}}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{W^{1,s}} = \left( \int_{\Omega} |\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) - \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}_h)|^s \right)^{1/s} \quad (4.121)$$

These errors are plotted on Figure 4.3(b) for shear-thinning cases ( $s = 1.16$  and  $s = 1.33$ ), on Figure 4.3(a) for shear-thickening cases ( $s = 2.25$  and  $s = 3$ ) and on Figure 4.3(c) for the Newtonian case ( $s = 2$ ). The reachable precision strongly varies with the value of  $s$ . The curve of  $E_{L^s}(\underline{\mathbf{d}})$  also stands for  $E_{W^{1,s}}(\mathbf{u})$  since both are extremely close for all  $s > 1$ .

In the Newtonian case, a convergence of order 2 is obtained for each unknown. The order 3 observed on  $E_{L^s}(\mathbf{u})$  (the norm  $L^2$  of the velocity error) is expected according to Aubin-Nitsche lemma applied to the Stokes problem on the convex unit square (see *e.g.* [47]). The order 2 is retrieved on the  $H^1$  semi-norm. Errors on strain-rate tensor  $E_{L^s}(\underline{\mathbf{d}})$  and deviatoric tensor  $E_{L^{s*}}(\underline{\boldsymbol{\tau}})$  strictly match since the viscosity is constant in this case and therefore  $\underline{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta_0 \underline{\mathbf{d}}$ .

In the shear-thinning case, the order 3 for the norm  $L^2$  on velocity does not occur but order 2 is maintained for  $\mathbf{u}$  and  $\underline{\mathbf{d}}$ . The orders of convergence decline for  $p$  and  $\underline{\boldsymbol{\tau}}$  when  $s$  tends to 1.

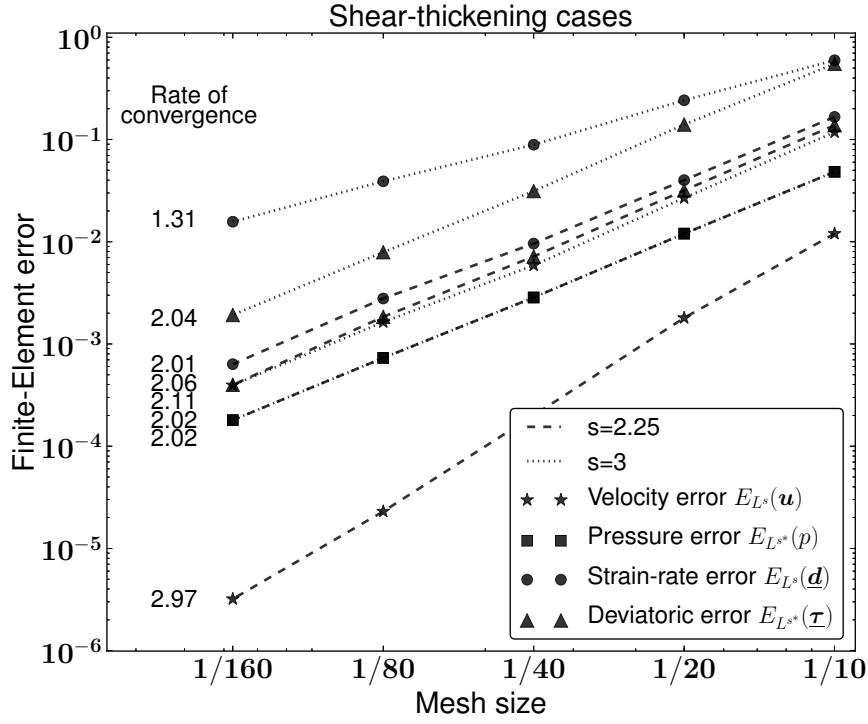
In the shear-thickening case, results are rather different. The error on the pressure  $E_{L^{s*}}(p)$  remains identical in both cases, providing an order of convergence of 2 for all  $s$ . The error  $E_{L^{s*}}(\underline{\boldsymbol{\tau}})$  increases with  $s$  but the order of convergence of 2 is also maintained. This very robust behavior seems to have consequences on the velocity approximation. The order of convergence obtained from  $E_{L^s}(\mathbf{u})$  remains larger than 2 but the order of convergence evaluated from  $E_{L^s}(\underline{\mathbf{d}})$  (which matches the one based on  $E_{W^{1,s}}(\mathbf{u})$ ) significantly declines when  $s$  increases. It leads to quite high errors considering the  $P_2$  quadratic approximation employed for the velocity discretization.

As a comparison, one can pay attention to the error bounds provided in [154] for the same discretization but applied to a *three-field* weak formulation of the power-law Stokes problem. In the shear-thinning case ( $1 < s < 2$ ), finite-element errors for  $\mathbf{u}$ ,  $p$  and  $\underline{\boldsymbol{\tau}}$  with respect to the mesh step size  $h$  are bounded as follows :

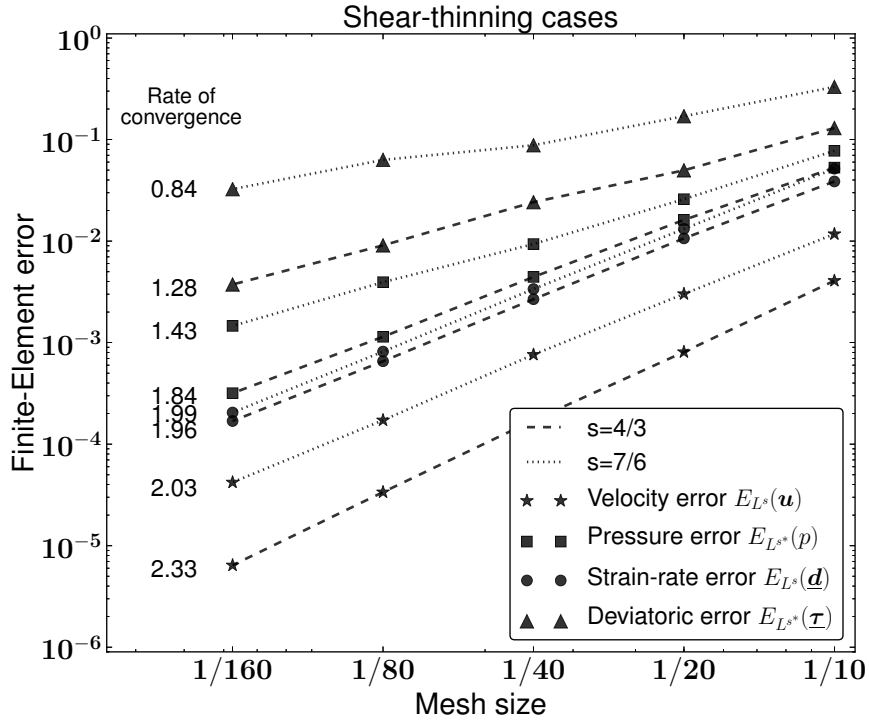
$$E_{L^{s*}}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) \leq Ch^{2(s-1)}, \quad (4.122)$$

$$E_{L^{s*}}(p) \leq Ch^{2(s-1)}, \quad (4.123)$$

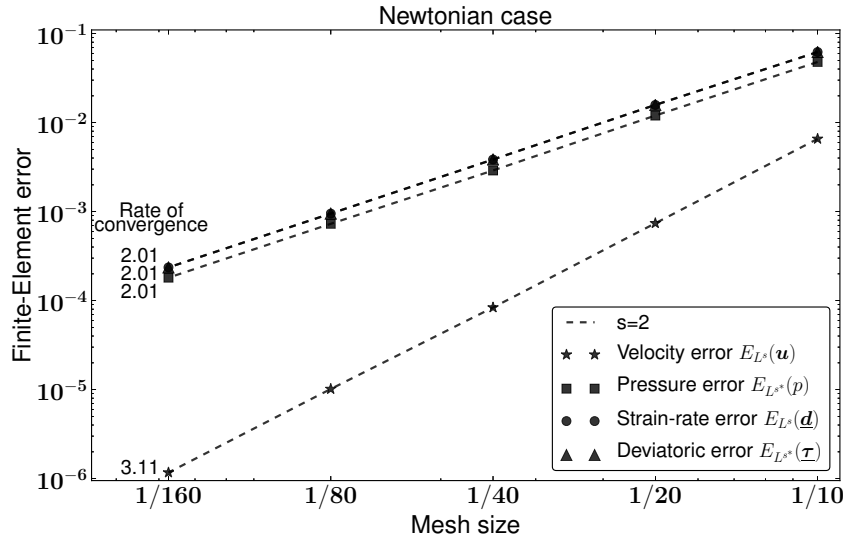
$$E_{W^{1,s}}(\mathbf{u}) \leq Ch^s \quad (4.124)$$



(a) Shear-thickening ( $s > 2$ )



(b) Shear-thinning ( $1 < s < 2$ )


 (c) Newtonian( $s = 2$ )

**Figure 4.3:** Convergence curves : variation with respect to the mesh-cell size  $h$  of the following finite element approximation errors (defined by (4.120)) :  $E_{L^s}(\mathbf{u})$  (Velocity error),  $E_{L^s}(\underline{d})$  (strain-rate error),  $E_{L^{s^*}}(p)$  (pressure error) and  $E_{L^{s^*}}(\underline{\tau})$  (deviatoric error). These errors have been computed using  $\mathbf{LA}$  algorithm for various power-law exponent  $s$  ( $s = 1.16, 1.33, 2.25$  and  $3$ ; exact solution given by (4.118)). The rates of convergence indicate the average logarithmic slope. Pressure error is identical for  $s = 2.25$  and  $s = 3$ .

where  $s^* = s/(s - 1)$  is the conjugate exponent of  $s$ .

Our results match these estimations in the Newtonian case. For  $s < 2$ , the computed orders of convergence are significantly better than these estimations. Let us point out that no similar estimate exist for  $s > 2$ . In the present four-field formulation discretized using the finite-element triple 4.2(a)-(4.2(b))-(4.2(c)) (see Figure 4.2), Figure 4.3 demonstrates the convergence of the method for all  $s$ .

We point out that the errors on velocity and pressure obtained from the Picard and the Newton algorithm are identical for  $s < 3$ . For  $s \geq 3$  the fixed point method is unable to converge whereas Newton and both  $\mathbf{LA}$  algorithms reach again the same accuracy for the converged state  $(\mathbf{u}, p)$ . The non-convergence of the Picard method could be due to the fact that the exponent  $(s - 2)$  in the power-law (4.7) becomes greater than 1 inducing a loss of contractivity for the functional.

## 4.6.2 Comparative performances

Table 4.2 indicates CPU time per iteration and the number of iterations required for the Picard algorithm, the Newton-Raphson algorithm and the nonlinear augmented Lagrangian algorithms  $\mathbf{LA}$  and  $\mathbf{LA\theta}$  to converged. The same four cases of non-linearities are presented (*i.e.*  $s = 1.16, 1.33, 2.25$  and  $3$ ). The results have

#### 4. SOLVEUR ÉLÉMENTS FINIS QUATRE CHAMPS POUR DES ÉCOULEMENTS QUASI-NEWTONIEN

Mesh	#dofv	#dofp	#dof <sub>t</sub>	#StokesSP	#TensorSP	#memS	#memT	#ratioM
10 × 10	607	163	846	37923	7614	0.58	0.11	4.98
20 × 20	2057	535	2964	130544	26676	1.99	0.4	4.89
40 × 40	8677	2210	12774	554988	114966	8.47	1.75	4.83
80 × 80	34053	8594	50598	2200201	455382	33.57	6.95	4.82
160 × 160	135697	34085	202584	8771837	1823256	133.84	27.82	4.81

**Table 4.1:** Characteristic quantities of unit square meshes. The second column (#dofv) indicates the number of  $P_2$  degrees of freedom discretizing the velocity, the third column (#dofp) the number of  $P_1$  degrees of freedom for the pressure and the fourth column (#dof<sub>t</sub>) the number of  $P_1^{disc}$  degrees of freedom for the tensorial unknowns  $\underline{d}$  and  $\underline{\tau}$ . The fifth and sixth columns (#StokesSP and #TensorSP) report the number of non zero coefficients of the Stokes linear system of equation (4.100) and the tensorial linear system of equation (4.102). The seventh and eighth columns (#memS and #memT) represent an estimation of the memory, in megabytes, required to store the sparse Stokes and tensorial systems. The last column (#ratioM) is simply the ratio between #memS and #memT. From the system sizes and the number of non zero coefficients of the systems, one can deduce that the tensorial system is significantly sparser than the Stokes system.

been obtained on the analytical solution (4.118) computed on the unstructured quasi-uniform  $80 \times 80$  mesh (see Table 4.1). In the sequel, the Stokes system designates the linear system resulting from the assembly of the variational system (4.23) (or (4.100)). Its matrix  $M$  is square and belongs to  $\mathcal{M}(2n_v + n_p)$  in  $2D$  and to  $\mathcal{M}(3n_v + n_p)$  in  $3D$ ,  $n_v$  and  $n_p$  being the number of degrees of freedom for velocity and pressure (given in Table 4.1 in columns #dofv and #dofp respectively). The tensorial system designates the linear system resulting from the assembly of the variational equation (4.102) once the scalar quantity  $\|d\|_{n+1}$  has been computed for each tensorial degrees of freedom  $n_s$  (given in Table 4.1 in column #dof<sub>t</sub>). Its matrix  $T$  is square and belongs to  $\mathcal{M}(3n_s)$  in  $2D$  and  $\mathcal{M}(6n_s)$  in  $3D$  since it is symmetrical. The computation stops when the relative variation between two successively computed velocity fields is lower than  $10^{-5}$ . The number of iterations and consequently the CPU time required for **LA** algorithms strongly depends on the value of the augmented Lagrangian parameter  $r$  (and  $\theta$  for **LA $\theta$** ). The results given in Table 4.2 indicate the best observed performances and the corresponding values for the parameters  $r$  and  $\theta$  are provided.

The values of  $s$  "close" to 2 (here  $s = 2.25$  and  $s = 1.33$ ) represent *close-to-linear* situations. In these situations, Picard algorithm and **LA** algorithms require approximatively the same number of iterations. Algorithm **LA $\theta$**  solves twice the same equations as **LA** and numerical experiments show approximatively half as many iterations. When  $s$  goes away from 2, the trend changes and both algorithms **LA** and **LA $\theta$**  give better performances in terms of iterations compared to the fixed point. For proper values of  $r$  and  $\theta$ , **LA $\theta$**  provides significant improvements.

$s$	Picard		Newton		$\mathbf{LA}$			$\mathbf{LA\theta}$			
	#ite	#cpu	#ite	#cpu	#ite	#cpu	$r$	#ite	#cpu	$r$	$\theta$
1.16	54	6	5(+9)	8.6	35	1.1	0.3	13	2.2	1	0.2
1.33	27	5.9	5(+3)	8.7	21	1.1	0.2	9	2.15	0.7	0.33
2.25	11	5.8	5	8.5	13	1	0.03	5	2	0.15	0.4
3	NA	NA	8	8.6	23	1	0.004	9	2	0.008	0.4

**Table 4.2:** Comparative performances for Picard, Newton and  $\mathbf{LA}$  algorithms for various power-law exponents  $s$ . Columns #ite indicate the number of iterations required for the algorithm to reach a  $10^{-5}$  converged velocity. For the Newton algorithm, the number in brackets gives the minimum number of Picard iterations required to compute the first-guess. Columns #cpu indicates the approximate time, in seconds, required to perform **one** iteration. Columns  $r$  (and  $\theta$ ) report the corresponding values used for the numerical parameters of  $\mathbf{LA}$  (and  $\mathbf{LA\theta}$ ) algorithm. The computations are sequential and the estimated times have been obtained with a 2.4Ghz core.

The Newton method is able to converge with a high rate of convergence for every values of  $s$  but when  $s$  tends to 1, the functional (4.37) degenerates and it requires many pre iterations (of the Picard algorithm for example) to reach the basin of attraction. Typically, for  $s < 1.5$ , the Newton method has to be initialized with a state  $(\mathbf{u}_0, p_0)$  such that  $\|u_0 - u^*\|/\|u^*\| \sim 0.1$ . On the contrary, the Newton algorithm is quite robust for  $s > 2$  and does not require an almost converged first-guess. However, for  $1 < s < 2$ , the fact that the Newton system (4.37) is singular for  $u_k = 0$  can represent a severe drawback for the use of this method. Indeed, the rate of convergence of the Newton algorithm applied to the analytical test case (4.118) in the case of a small average velocity strongly deteriorates. If the velocity norm is small enough (e.g.  $10^{-8}$  instead of 1 in the present case), the Newton algorithm is unable to converge. This property is not desirable when one solves low Reynolds macroscopic flows.

One iteration of the Newton method is significantly longer than a fixed point iteration due to the matrix-vector product performed at each iteration to compute the right-hand side.

In all situations, the principal interest lies in the computational burden. Regarding the time per iteration,  $\mathbf{LA}$  algorithm exhibits a ratio of 6 compared to Picard and a ratio of 8 compared to Newton. Then, even when  $s$  is not too far from 2, the gap in terms of CPU time is a strong advantage for  $\mathbf{LA}$ .

**Matrix structures** For both Newton and fixed point algorithm, one needs to compute the assembly of the Stokes system  $M$  corresponding to the new viscosity field. On the contrary, in  $\mathbf{LA}$  algorithm, the nonlinear part of the problem appears in ano-

ther equation, and then the Stokes type matrix  $M$  does not contain the viscosity. Thus it can be computed and factorized once and for all before the algorithm starts. The non-linear equation (4.102) requires first to compute the norm  $\|d\|_{n+1}$  of the rate of deformation tensor  $d_{n+1}$  using a Newton algorithm on the  $n_s$  norm values. This step has a negligible cost. In other respect, the tensorial matrix  $T$  contains approximatively one fifth as many non-zero coefficient (see Table 4.1, column #ratioM) making it lighter to assemble, store and solve.

In addition, the tensorial system, when discretized using  $P_1$ -discontinuous approximation, shows an extremely convenient structure which can be exploited. As a matter of fact, the resulting matrix is block diagonal at element level. Then solving the system amounts to solving a sequence of  $3 \times 3$  linear systems in  $2D$  and  $9 \times 9$  linear systems in  $3D$ . These solutions can be done explicitly along the system assembly. This property has two major consequences. The first one is the time saving since such a resolution becomes negligible (whereas it is dominant in the general case) in the whole process and the time per iteration reduces to the solution of the previously factorized Stokes system.

**Memory** The other resulting feature is the tremendous memory saving one can obtain in a data assimilation context. As pointed out above, the adjoint state is obtained from reverse accumulation which requires to store each state encountered by the iterative process. For Picard and Newton method (or conjunction of both) the resulting memory consumption corresponds to the required memory to store one Stokes system multiplied by the number of iterations performed by the algorithm (see [121]). Estimations of the storage of a sparse Stokes system are given in Table 4.1, column #memS. Irrespective of the discretization, the sparse tensorial system is significantly smaller to store (see Table 4.1, columns #memT and #ratioM). In the present situation, the structure of the tensorial system allows to solve it along the assembly. Consequently, no storage of this matrix is needed and the memory consumption of  $\mathbf{LA}$  algorithm reduces to the storage of one sparse Stokes system. Typically, for  $s = 1.33$  it leads to a memory consumption ratio of 27 compared to the use of a fixed point algorithm. The gain grows with the non-linearity.

### 4.6.3 Summary

Algorithm  $\mathbf{LA}\theta$  provides a good convergence speed (*i.e.* the number of iterations required to reach a given threshold) for well-chosen values of parameters  $r$  and  $\theta$  and significantly improves algorithm  $\mathbf{LA}$ . If one takes into account the pre iterations required for the Newton method to be initialized, the convergence speeds are similar for  $\mathbf{LA}\theta$  and Newton-Raphson for all values of  $s$  (see Table 4.2).

Moreover, it shows a time ratio per iteration of approximatively 3 compared to Picard algorithm and 4 compared to the Newton method. The computational time is thus greatly reduced.

In other respect, the various issues of the Newton-Raphson algorithm for the present power-law Stokes problem (namely the ill-posedness of the principal operator for a constant  $u_0$ , the degeneration of the bilinear form for small value of  $s$  and especially the small radius of its convergence disk) makes it an unreliable choice as a solver for realistic simulations and a fortiori for an identification parameter process for pseudoplastic fluids. For the simulations of dilatant fluids, the functional (4.37) is continuous and does not degenerate and Newton algorithm is suitable for this type of fluid.

In the case of the realistic glaciological simulation described in Section 4.8.3, the use of  $\mathbf{LA}\boldsymbol{\theta}$  for the forward problem allows to divide the time of computation by 3.5 compared to the fixed point (for a  $10^{-5}$  converged velocity with  $r = 1.8$  and  $\theta = 0.2$ ). Indeed, the same run using Picard algorithm results in 24 iterations and 41s (instead of 14 iterations and 12.1s for  $\mathbf{LA}\boldsymbol{\theta}$ ) to converge. In terms of memory, the computation of the adjoint state using  $\mathbf{LA}\boldsymbol{\theta}$  would then require the storing of 1 Stokes sytem instead of 24 when using the fixed point.

## 4.7 Local sensitivity analysis

Sensitivity analysis allows to study how a perturbation on the input of a model induces perturbations on its response. The local sensitivity, based on the Taylor expansion, analyses the behavior of a system in the neighbourhood of a given state for a static system or of a given trajectory for a dynamic system. The use of the adjoint method to perform sensitivity analysis provides the directional Fréchet-derivative of a functional with respect to all its parameters with the integration of one extra model only (unlike the direct approach which brings a sensitivity with respect to one parameter for a given direction). Then, the adjoint model is well suited to study systems with a large number of parameters and/or spatially distributed parameters.

The calculation of local sensitivities contributes to improve the understanding of the system by identifying important parameters, to determine the influence of parameters variations on the behavior of the system and eventually to improve the understanding of the physics. Hereafter, we will focus on free-surface problem at a given time (*i.e.* for a domain  $\Omega$  fixed) thus providing *quasi-static* sensitivities. Adjoint method with a moving free-surface would require extra terms due to the domain shape modification, which are not addressed in the present study.

Originally, DassFlow (*Data assimilation for free-surface Flows*) software implements shallow water equations (see [103] and [83]). We extended it to the present



non-linear Stokes problem. It is designed for variational data assimilation (classically called 4D-var method). Variational data assimilation is based on the optimal control theory and the adjoint equations (see *e.g.* [111]). Briefly, this method consists in computing a control vector value  $\mathbf{k}$  minimizing a cost function which measures the discrepancy between the computed variable and available data. In our case the control vector  $\mathbf{k}$  includes spatially distributed variable such as inflow and outflow, lateral stresses, the basal slipperiness  $\beta$ , the rheological constant  $\eta_0$  and the rheological exponent  $s$ .

### 4.7.1 Observations and cost function

We call  $\mathbf{k}_0$  the control variables which define the true state, a priori unknown, in which observations  $u^{obs}$  have been generated. We will consider two types of observations in the following. If one observes the normal profile of a streamwise velocity of the flow at a given abscissa  $x_0$ , we have :

$$u^{obs} = u^{obs}(\mathbf{k}_0; x_0, z), \quad b \leq z \leq H \quad (4.125)$$

where  $b$  stands for the ordinate at bottom and  $H$  the ordinate at surface. In the case of observed surface velocities, we have :  $u^{obs} = u^{obs}(\mathbf{k}_0; x, H)$ . Given velocity observations denoted  $u^{obs}$ , we define the cost function  $j$  which measures the discrepancy between the computed variable (state of the system) and the available data as follows :

$$j(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \int_X |\mathbf{u}(\mathbf{k}, z) - u^{obs}|^2 \, dx \, dz \quad (4.126)$$

where  $X = \Gamma_s$  in the case of an observed velocity profile and  $X = [0, h]$ ,  $h$  being the thickness of the domain at  $x = x_0$ , in the case of observed surface velocities.

### 4.7.2 Adjoint model

In order to compute efficiently all partial derivatives of the cost function  $j(\mathbf{k})$  with respect to the components of the control vector  $\mathbf{k}$ , we introduce the adjoint model (see *e.g.* [111]). As we saw previously, in DassFlow software, we use the automatic differentiation of the source code to obtain the adjoint model (see [83]). This last approach ensures a good consistency between the computed cost function (including all types of errors -errors of discretization, rounding errors, iterative algorithms, etc.) and its gradient since it is the computed cost function which is differentiated. In the case of DassFlow, the direct code is written in Fortran 95 and it is derived using the automatic differentiation tool Tapenade (see [79]). In order to obtain the "computational gradient" (partial derivatives of the cost function  $j$  using differentiation of the forward code), the procedure consists in running the direct code then the adjoint code. We point out that  $j$  must be included into the response of the forward

code.

We recall that a single integration of the direct model (4.16)-(4.17) followed by a single integration of the adjoint model allow to compute all components of the gradient of the cost function. We address to [83] for more details.

## 4.8 Numerical experiments

This section presents the numerical experiments and the corresponding sensitivity analyses. The first one is based on a laboratory experiment at small scale described in [31]. It consists in a gravity-driven surge of kaolin on an inclined plane considered at steady state (*i.e.*  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_s} = 0$ ). For this flow we focus on the sensitivity with respect to the spatially distributed power-law index  $s$  (see equation (4.7)) considering an observed velocity profile at a given abscissa (see Figure 4.4). The second one is a glaciological application at large scale that uses radar-sensed profiles of the surface and the bottom of a continental glacier in Antarctica due to [109]. According to current glaciological questions, we study the sensitivity of this flow with respect to the basal slipperiness (see equation (4.14)) distributed on the boundary  $\Gamma_b$ . We consider surface velocities as observations. In both cases, data are synthetic (*i.e.* numerically generated).

These flows being steady and relatively shallow, we first present the analytical solution of the uniform steady power-law Stokes problem with friction condition at bottom. The goal is to use it as an inflow Dirichlet condition for both simulations. This analytical solution is not classical in the presence of basal friction.

### 4.8.1 Analytical Poiseuille-like solution

We call *permanent flow in a channel*, the steady ( $\partial_t \cdot = 0$ ) uniform ( $\partial_x \cdot = 0$ ) solution of the 2D viscoplastic Stokes problem on a given domain  $\Omega$  corresponding to a channel with a flat bottom and a constant thickness  $h = (H - b)$  with an angle of inclination  $\theta$ . We consider a friction condition at bottom (defined by (4.14)-(4.15)). The stationary free-surface condition on the upper surface corresponds to  $\sigma \mathbf{n}|_{\Gamma_s} = 0$  and  $u \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_s} = 0$ . From equations (4.16)-(4.17), we calculate the expression of the solution  $\mathbf{u} = (u_\tau, u_n)^T$  of this flow in the "mean-slope" coordinate system  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{z})$  with  $\bar{x} \in [0, L]$  and  $\bar{z} \in [0, h]$ . We obtain the following expression for the tangential and normal component of the velocity :

$$u_\tau(\bar{z}) = -\frac{\rho g \sin(\theta) h}{\beta} + \frac{s-1}{s} (2\eta_0)^{\frac{1}{1-s}} (\rho g \sin(\theta))^{\frac{1}{s-1}} (h^{\frac{s}{s-1}} - (H - \bar{z})^{\frac{s}{s-1}}) \quad (4.127)$$

$$u_n = 0 \quad (4.128)$$

## 4.8.2 The viscoplastic steady wave

### 4.8.2.1 Description

Following [31], we present hereafter the test case of a steady wave of non-Newtonian fluid coming from a gravity-driven surge on a inclined plane of inclination  $\theta$ . We will consider the rheological parameters of the *kaolin slurry* (refined clay) used in their experimental setup but we focus exclusively on the pseudoplastic behavior of kaolin slurry and thus, modeling it using a power-law representation (thus neglecting the *Herschel-Bulkley* yield stress and time dependent-process such as viscoelastic behavior). The inclined plane is in fact a conveyor belt moving at constant velocity  $u_\tau^b = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\Gamma_b}$  in the upstream direction toward a fixed wall. Then a given volume of kaolin slurry, abandoned on the conveyor belt converges to a front shape whose dimensions depend on the inclination  $\theta$  and the velocity of the belt  $u_\tau^b$ . The following test case is based on the results presented in [31] and we address this paper for more details on the experimental setup.

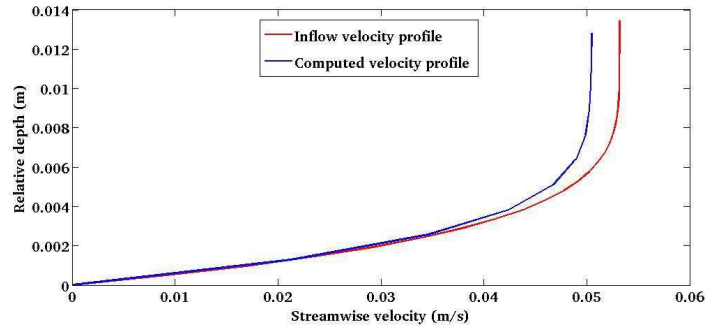
In such a flow, three zones can be schematically distinguished : the front, a region where flow height is uniform, and a region influenced by the upper wall. The upstream zone perturbed by the wall is of relatively short length and appears to remains confined (see [31]). Then, neglecting the upper wall, the flow far from the front corresponds to the permanent flow introduced in (5.22) and thus, this velocity profile can be used as an inflow for the numerical simulation. Moreover, as noted in [31], slipping at the bottom is negligible. Hence, we will consider an homogeneous Dirichlet condition. The free upper-surface is subject to free-constraint condition. The physical parameters used for the simulation are presented in Table 4.3. The model is the incompressible Stokes problem (4.16)-(4.17) solved on the geometry plotted on Figure 4.5. Input parameters as well as the shape of the domain are determined using the experimental measurements presented in [31].

The mesh is triangular and made of  $N_{cell} = 23744$  cells. We plot on Figure 4.4 the input velocity profile computed from (5.22) and the computed streamwise velocity profile in the uniform region (here at  $x_0 \sim -16cm$ ) with respect to the normal thickness  $\bar{z}$ . Then, the Reynolds number at which the flow occurs is :

$$\mathcal{Re} = \frac{\rho U^* H^*}{\eta_e} = \frac{\rho U^* H^*}{\eta_0 \left(\frac{U^*}{H^*}\right)^{s-2}} \sim 10^{-1} \quad (4.129)$$

and low Reynolds approximation is valid. It follows that the Stokes problem is suited for the simulation of this flow.

As noted in [31], rheological parameter measurements are possible but with large uncertainties (see also [4]). As a first step, we perform sensitivity analysis with respect to a locally defined rheological exponent  $s$  to highlight area sensitive to the rheological behavior using the cost function (4.126). We take as observations  $u^{obs}$  the computed vertical velocity profile at  $x_0$  plotted on Figure 4.4.

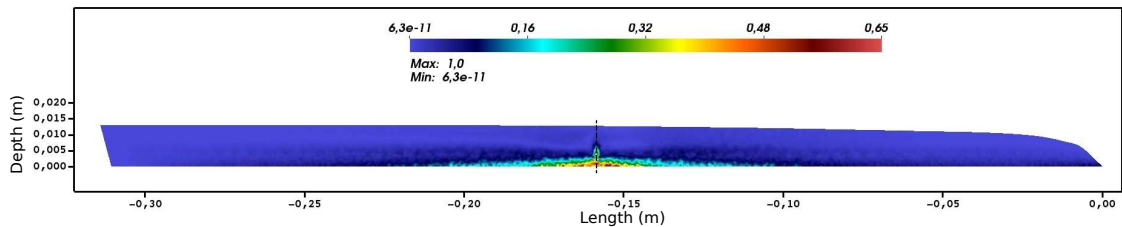


**Figure 4.4:** Computed velocity in the surge at  $x_0$  and inflow velocity at  $x = 0$

#### 4.8.2.2 Numerical results

We present on Figure 4.5 the sensitivity of the model with respect to the rheological exponent  $s$ . In this case,  $s$  is locally defined (constant by cell) and consequently  $\partial_s j$  has the same dimension as  $s$ .

First, from Figure 4.4, one can state the uniformity of the flow in the region "far from the front". The slight decreasing of thickness between the inflow boundary and the observation zone at  $x_0$  explains the small differences between the two vertical velocity profiles.



**Figure 4.5:** Kaolin wave : Normalized sensitivity with respect to the spatially distributed power-law exponent  $\partial j / \partial s(s_0) \in \mathbb{R}^{N_{cell}}$ ,  $s_0 = 2$  in the mean-slope frame. The velocity profile plotted on Figure 4.4 (obtained with  $s = 1.24$ ) is used as synthetic data. The scale does not reach 1 because cell values have been interpolated on the vertices of the mesh.

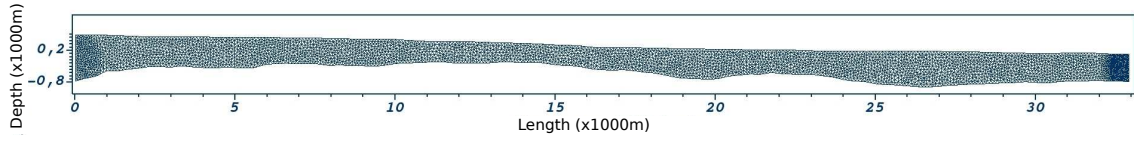
Figure 4.5 shows that the normalized sensitivity to the local power-law exponent  $s$  is high close to the line of observation (represented with a dash line). Besides, it clearly appears that the highest sensitivity region is concentrated close to the bottom. The sensitivity at upper surface is close to zero. Hence a precise knowledge of the power-law index  $s$  close to surface would be quite useless to reproduce the observed velocities  $u^{obs}$ . It follows that the sensitivity is correlated to the shearing in the flow, which is maximum at bottom and goes to zero at free-surface. Then we can state that, in terms of rheology, the computed velocity at the surface depends almost only on the rheological behavior *at bottom where the shearing is the stronger*. This result is all the more remarkable since the misfit between computed and observed velocities is greater at surface and close to zero at bottom (see Figure 4.4). As noted in [31], rheometer measurements are spoiled by experimental artifacts for small and large shear rates. Then, from this sensitivity analysis, one can state that the behavior at high shear rates is of primary interest to constrain the model and rheological measurements should be done in this perspective. Furthermore this result allows to state that, in this quasi-uniform flow situation, the infinite (singular) viscosity predicted by the power-law at surface (for  $1 < s < 2$ , see equation (4.30)) does not affect the computation in terms of surface velocities.

### 4.8.3 Geophysical test case : the Mertz glacier

#### 4.8.3.1 Description

We compute hereafter an ice flow subject to a gravity source term over a sloppy bedrock. This type of flow are extremely viscous and slow and then occurs at low Reynolds. They are observed, at "small scale", in *mountain glacier* such as in Himalaya, Andes, Alps, etc. ( $Re \sim 10^{-13}$ ) and at larger scale in *ice-sheets* : Greenland and Antarctica ( $Re \sim 10^{-10}$ ) (see *e.g.* [69]). The flow of ice, if considered isotropic, is described by an empirical constitutive law called *Glen's law*, corresponding to a power-law and brought to light in [59].

In order to better forecast current climatic trends (typically in terms of sea-level rise), an important issue is to obtain accurate simulations of glaciers hence to calibrate the models. The observations potentially available in this context are : the topography of the bedrock, the surface elevation and surface velocities. One of the main uncertainties in glaciological modelling is the basal slipperiness  $\beta$ . It is a quantity which link the sliding speed  $(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\Gamma_{fr}}$  to the basal shear-stress  $\sigma_{n\tau}$ . The physical meaning of  $\beta$  is unclear since it can represent many processes such as *e.g.* the roughness of the bedrock, the basal hydrostatic pressure of subglacial water cavity, the rheology of a subglacial sediment boundary layer and more generally the thermal conditions on the bedrock (see *e.g.* [69]). Since this quantity is unmeasurable, the use of control methods to infer  $\beta$  is of prime interest to calibrate ice flows. As a first step toward data assimilation, sensitivity analysis helps to better unders-



**Figure 4.6:** Vertical cut of the outlet glacier Mertz, Antarctica (topography profile from [109]) , x-scale = 2/5

<i>Rheological exponent</i>	<i>Average slope</i>	<i>Gravity</i>	<i>Fluid viscosity coefficient</i>	<i>Kaolin slurry density</i>
$s = 1.24$	$\theta = 15^\circ$	$g = 9.81 m/s^2$	$\eta_0 = 17.04 Pa \cdot s^{0.24}$	$\rho = 1399 kg/m^3$

**Table 4.3:** Physical input parameters of the kaolin slurry surge

<i>Rheological exponent</i>	<i>Average slope</i>	<i>Gravity</i>	<i>Ice density</i>
$s = 4/3$	$\theta = 2 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$	$g = 9.756234 \cdot 10^{15} m \cdot a^{-2}$	$\rho = 9.1376 \cdot 10^{-19} MPa \cdot a^2 \cdot m^{-2}$
<i>Fluid viscosity coefficient</i>		<i>Fluid height of the uniform flow</i>	<i>Basal slipperiness</i>
$\eta_0 = 40 MPa \cdot a^{\frac{1}{3}}$		$h = 916.21 m$	$\beta = 1.5 \cdot 10^{-4} MPa \cdot a \cdot m^{-1}$

**Table 4.4:** Physical input parameters of the Mertz glacier

tand the underlying physics of the modelling of sliding and quantify the role of the sliding coefficient in terms of model response.

The computational domain is built from real field data ; topography of the bedrock and of the surface are bidimensionnal radar-sensed layer of the *Mertz glacier* in East Antarctica. These layers have been measured along a flowline of this glacier (Italian Antarctic Expedition 2000, see [109]). Our study focuses on the grounded part of the glacier, called the outlet glacier. The domain is represented on Figure 4.6 with an horizontal scale of 2/5. The mesh is triangular and made of 8241 cells. The model is the incompressible Stokes problem (4.16)-(4.17) at steady state solved on the real geometry with the following boundary conditions : free-constraint on the upper surface  $\Gamma_s$ , friction condition on the bedrock  $\Gamma_{fr}$  (see equation (4.14)-(4.15)), prescribed horizontal velocity profile  $u_l(z)$  on the vertical inflow boundary  $\Gamma_l$ , hydrostatic pressure of ice on the outflow boundary  $\Gamma_r$  where  $h(z)$  represents the height of ice as a function of the ordinate  $z$ . The left boundary is subject to a non homogenous Dirichlet condition on the velocity. The prescribed streamwise velocity  $u_\tau(z)$  is given by the analytical Poiseuille-like flow solution (5.22) using parameters given in Table 4.3. The right boundary is subject to a given normal stress that corresponds to hydrostatic pressure for the permanent flow, that is to say :  $\underline{\sigma}\mathbf{n}(z) = \rho\mathbf{g}(h_s - h(z))$  where  $h_s$  represents the height of the surface at the right boundary. In order to be consistent with the encountered velocity magnitudes, runs are performed using a  $(MPa - m - a)$  unit system. The physical parameters used for the runs are presented

in Table 4.4 (see *e.g.* [69]).

#### 4.8.3.2 Numerical results

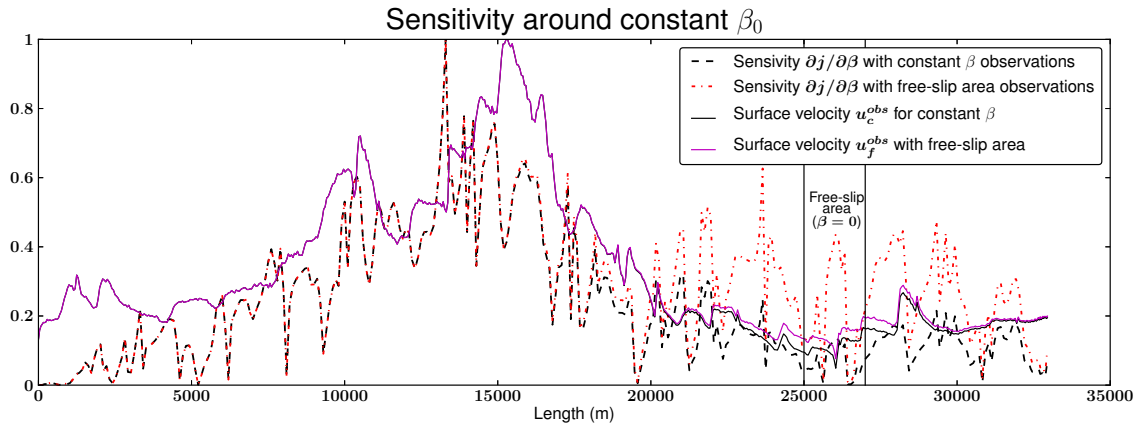
The cost function used for these sensitivity analysis is :

$$j(\beta, \eta_0) = \int_{\Gamma_s} \|u_s^{obs} - u_s(\beta, \eta_0)\|_2^2 d\mathbf{x} \quad (4.130)$$

The target surface velocities  $u^{obs}$  are perturbed with a random white noise of 1%. They are obtained using a linear sliding law and a spatially varying sliding coefficient defined by :

$$\beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [x_i, x_f] \\ 1.5 \cdot 10^{-3} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.131)$$

where the free-slip zone  $[x_i, x_f]$  could represent a subglacial lake or more generally an area of perfectly lubricated interface. Here we take  $x_i = 2.5 \cdot 10^3$  m and  $x_f = 2.7 \cdot 10^3$  m. The sliding coefficient is defined constant by edge on the bottom. Thus, the corresponding sensitivity  $\partial j / \partial \beta(\beta_0)$  is also a function of the abscissa. Synthetic surface velocity observations  $u_c^{obs}$  and  $u_f^{obs}$ , obtained with a constant  $\beta = 1.5 \cdot 10^{-3}$  and with  $\beta$  defined by (4.131) respectively, are plotted on Figure 4.7 at the value  $\beta_0 = 0.01$



**Figure 4.7:** Plain lines : computed surface velocities  $u_f^{obs}$  obtained using the basal slipperiness defined by (4.131) (in purple) and  $u_c^{obs}$  obtained using a constant value  $\beta_c = 1.5 \cdot 10^{-3}$  (in black) rescaled to remain smaller or equal to 1. Dash lines : computed gradient  $\partial j / \partial \beta$  using  $u_f^{obs}$  as synthetic data (in red) and  $\partial j / \partial \beta$  using  $u_c^{obs}$  as synthetic data (in black)

A first interpretation is that the sensitivity follows the variations of surface velocity ; a high velocity corresponds to a high sensitivity of the model to  $\beta$ . As noted in [127], it seems quite natural since a higher velocity means a larger misfit and consequently a larger gradient.

This high correlation suggests that surface velocities are well-suited as observations to identify the sliding coefficient.

However, Figure 4.7 shows an area of large sensitivity between  $x = 20\text{km}$  and  $x = 30\text{km}$  which does not corresponds to a specifically high velocity zone. The steep vanishing of  $\beta$  between  $x_i = 25\text{km}$  and  $x_f = 27\text{km}$  induces a large gradient despite a smaller misfit in and around the free-slip area. This « singularity » in the sliding coefficient was not obvious from the variations of surface velocities around the free-slip event.

One of the main process at stake in this rapid ice-stream type flow is the fluctuation of the pressure of subglacial meltwater inducing a « stick-slip » phenomenon (see [52]). This quasi-static sensitivity allows to detect at a given time the presence of a momentary increase in sliding rate given a geometry and surface velocities without transient simulation. The history and variations of the sliding rate can then be reconstructed through the quasi-static sensitivities and the fluctuations can be traced back (from a correct topography and surface measurements). Otherwise, theses sensitivities can also help defining areas of interest for sliding measurements since the fluctuations in water pressure for basal cavities are local in space and time.

As underlined in [69], "the transmission of basal movement to the surface is non-local and is strongly filtered". Here, both these phenomena are clearly highlighted and the sensitivity analysis tool demonstrates its ability to help the understanding of the physics by providing *a priori* interpretations of the observed flow ; the gradients of the fluid model help to see beyond the filtering and the non-local behaviour.

## 4.9 Concluding remarks

This work presents a three-field finite element solver for quasi-Newtonian flows based on a four-field saddle-point formulation. The well-posedness of the continuous problem associated with this four-field formulation was studied. The existence of a solution to the corresponding saddle-point problem is proved. The methodology is based on an augmented Lagrangian formulation and can then be extended to the solution of the non differentiable elastic-viscoplastic flow problem. A comparison of the solver with the fixed point and the Newton method demonstrates the strong numerical performances of the present algorithms **LA** and **LA $\theta$**  ; the time of computation can be typically divided by 4 along with very low memory consumption. Algorithms **LA** and **LA $\theta$**  also show an important robustness in larger range of power-law exponent than both fixed point and Newton method.

Using adjoint method, we performed sensitivity analysis on the nonlinear Stokes problem. In order to be coherent with physical problems, numerical experiments has been done on realistic test cases of current power-law flow problems. The ex-



perimental surge of kaolin slurry shows high sensitivity to the rheological exponent close to the bottom *i.e.* in the highly sheared zone establishing the importance of accurate rheological measurements at high-shear rate to constrain the flow. The flow of the Mertz outlet glacier in Antarctica also demonstrates the ability for the sensitivity analyses to detect a high frequency event in the basal sliding and more generally the strong modeling role of this parameter. As pointed out by Vaughan and Arthern [167], the modeling of the ice base is a crucial step to obtain accurate simulations and remains poorly understood and constrained. The simple numerical experiment presented here shows that the wide range of processes at stake in the basal slip and their coupling can be studied and quantified using sensitivity analysis.

In a parameter identification perspective, the **LA $\theta$**  algorithm which provides faster calculations along with low memory consumption is of prime interest. On the one hand, the computation cost of a data assimilation cycle, in terms of CPU time, is estimated around *50-100 times the cost of a direct run* (when using a first order descent algorithm). In addition the accuracy of the gradient computed by the adjoint code is strongly linked to the accuracy of the direct solver. Then improving the direct run could lead to important time saving for data assimilation. On the other hand, the reverse accumulation technique is significantly memory consuming and the present implementation of **LA** algorithm represents a strong asset to overcome this problem.

## Acknowledgments

This work was partially supported by PRES Toulouse, with the PhD fund of the first author. We want to thank Benoit Legrésy (LEGOS) for his data on the Mertz glacier and Ronan Madec (IMT) for his help on the development of the adjoint code. This work was also supported by *Agence Nationale de la Recherche* through ADAGe project No. ANR-09-SYSC-001. We also thank INSA students for developments within the software.

# 5 Analyse de sensibilité variationnelle et rhéométrie inverse

---

5.1	RÉSUMÉ EN FRANÇAIS . . . . .	118
5.2	INTRODUCTION . . . . .	121
5.3	CONTINUOUS AND DISCRETE FORWARD MODEL . . . . .	124
5.4	NUMERICAL INVERSE TOOLS . . . . .	124
5.4.1	<i>Basic Principles of a Variational Data Assimilation Process</i> . . . . .	125
5.4.2	<i>Cost Function in Presence of Observations</i> . . . . .	126
5.4.3	<i>Adjoint Model and Gradient Computation</i> . . . . .	126
5.5	ANALYTICAL SOLUTION AND RELATED SENSITIVITIES . . . . .	128
5.6	ARE SURFACE VELOCITY OBSERVATIONS RELIABLE? . . . . .	130
5.7	VIRTUAL RHEOMETRY : POWER-LAW EXPONENT . . . . .	133
5.7.1	<i>Flow Description</i> . . . . .	133
5.7.2	<i>Numerical Results</i> . . . . .	134
5.8	VIRTUAL RHEOMETRY : CONSISTENCY $\eta_0$ (TEMPERATURE DEPENDENCY) . . . . .	135
5.8.1	<i>Description of the Thermal Dependent Flow</i> . . . . .	136
5.8.2	<i>Sensitivity With Respect to <math>\eta_0</math></i> . . . . .	137
5.8.3	<i>Identification of <math>\eta_0</math> Based on Surface Velocity Observations</i> . . . . .	140
5.9	CONCLUSION . . . . .	146

---

Le présent chapitre a été soumis à publication sous une forme très similaire auprès de la revue AGU-*Journal of Geophysical Research*. Afin de limiter les redondances, la section 5.3 de présentation du modèle continu et discret a été significativement réduite et seuls le système d'équations global et ses conditions aux limites sont présentés. Le résumé reprend et complète, en français, l'introduction et la conclusion originale en anglais, également fournies dans le chapitre en sections 5.2 et 5.9, et revient sur les principaux résultats obtenus.

## 5.1 Résumé en français

On réalise dans ce chapitre des analyses de sensibilité et des identifications de paramètres liées à la modélisation rhéologique du fluide en vu de quantifier le rôle de cette modélisation et de proposer une méthodologie liée à l'utilisation de méthodes inverses pour le contrôle rhéologique. Les fluides en loi de puissance définissent une large gamme de fluides géophysiques (voir section 2.4) dont l'observation consiste essentiellement en l'obtention d'une vue superficielle (de dessus) du fluide. Ces fluides ont un comportement rhéologique généralement complexe qui peut être difficile à estimer en situation réelle et à mesurer en laboratoire (voir *e.g.* [35]). Dans le cadre d'un comportement en loi de puissance, la description rhéologique du fluide consiste en la détermination de deux grandeurs que sont la consistance du fluide  $\eta_0$  et l'exposant de la loi  $n$  (voir équation (2.21)). On s'intéresse dans ce chapitre à deux fluides géophysiques décrits par ce type de loi et sujets à une dépendance forte de leurs caractéristiques rhéologiques à leur température : la lave magmatique et la glace.

En modélisation des écoulements de lave, la question de la valeur de l'exposant de la loi de puissance est toujours matière à débat mais la littérature s'accorde sur un comportement rhéofluidifiant des laves magmatiques avec une possible dépendance de l'exposant à la température et/ou à la concentration cristalline (voir *e.g.* [73]). En glaciologie, la valeur de l'exposant  $n$  la plus couramment utilisée à été établie par [59] et sa dépendance à la température est également discutée (voir *e.g.* [36], [150]).

Cependant, aussi bien pour la lave que pour la glace, le couplage avec la thermique est principalement intégré dans la définition de la consistance du fluide. Des relations de lois et de paramétrisations variées existent pour le calcul de la consistance de ces fluides. Une description commune que l'on retrouve pour la lave et la glace consiste à utiliser une loi de type Arrhenius (voir *e.g.* [69] pour la glace et [32] pour la lave).

Ces problématiques (*i.e.* dépendance de la rhéologie à la température et difficulté des mesures rhéologiques) sont particulièrement adaptées à un traitement par des méthodes inverses : analyse de sensibilité pour la quantification du rôle de la dépendance à la température dans la modélisation et identification de paramètres pour l'inférence des paramètres rhéologiques.

Dans un contexte glaciologique, la réalisation d'analyse de sensibilité n'a été jusqu'à présent que rarement réalisée. On trouve des études de sensibilité utilisant des méthodes d'échantillonnage stochastiques dans [105] ou [12] pour des descriptions de type *shallow*. Des analyses de sensibilité de même type sont menées sur des écoulements de lave dans [19]. La limitation de ce type de méthodes pour l'analyse de sensibilité est la nécessité de réaliser un grand nombre de simulations directes pour

quantifier la propagation des perturbations dans le modèle. À l'inverse, l'utilisation de l'adjoint fournit une carte de sensibilité complète, bien que locale (au sens du développement de Taylor), en une seule intégration du modèle. L'une des difficultés demeure l'obtention du modèle adjoint qui peut représenter une tâche complexe selon le modèle considéré. Une approche par différentiation automatique telle que la nôtre peut représenter une alternative efficace pour l'obtention d'un modèle adjoint à moindre coût. Cette démarche est également suivie dans [80] pour la simulation à grande échelle des calottes polaires à partir de modèles de type "shallow ice". À notre connaissance, des analyses de sensibilité variationnelles pour le problème de Stokes en loi de puissance n'ont jamais été menées.

Concernant l'identification de paramètres en glaciologie, [115] est généralement considéré comme l'article fondateur et de nombreuses études ayant pour objet la reconstruction des paramètres d'entrée du modèle ont été menées depuis. En termes de méthodes variationnelles, l'approximation proposée par Macayeal [115] (faisant l'hypothèse d'une viscosité indépendante de la vitesse, voir chapitre 6) pour les modèles de type "shallow ice" est probablement la plus utilisée, le plus souvent pour la reconstruction du paramètre de friction (voir *e.g.* [147], [104], [170], [98], [94]). Cette approximation a été étendue plus récemment au modèle de Stokes dans [127].

Le système adjoint sous forme faible associé au problème de Stokes pour les fluides rhéofluidifiants, basé sur la formulation faible à trois champs classique (voir [11], est introduit par [48] pour des conditions limites de type "flux imposés". Le caractère bien posé du problème de contrôle frontière par les flux imposés est établi. La dérivation du modèle adjoint sous forme forte dans un contexte glaciologique a récemment été réalisée dans [133], associée à un algorithme de résolution performant de type quasi-Newton. Des identifications académiques sur le coefficient de friction et l'exposant rhéologique sont faites sur un modèle éléments finis tridimensionnel.

Le présent chapitre fait appel à une algorithmique de résolution différente de celle présentée dans la littérature. De plus, on s'intéresse au développement d'une méthodologie pour le contrôle rhéologique des écoulements géophysiques, dans un cadre plus large que la modélisation glaciologique. Les analyses de sensibilité préliminaires nous semblent indispensables, tant pour mieux comprendre les écoulements et les modèles que pour lancer ensuite des processus d'identification purement algorithmiques. De plus des identifications de la consistance du fluide, spatialement distribuée, sont réalisées.

La question de l'identification de paramètres par des méthodes inverses pour les écoulements de lave semble n'avoir jamais été traitée (voir [51] pour de l'ajustement direct de paramètres rhéologiques).

De même qu'au chapitre 4, les expériences numériques inverses présentées utilisent des données de vitesse de surface horizontale, considérant qu'elles sont géné-

ralement les principales (et les meilleures) données accessibles dans ces écoulements géophysiques. Dans le cadre de rhéométrie inverse proposé ici, une première question est soulevée vis-à-vis du caractère singulier de la description rhéologique en loi de puissance pour des écoulements à surface libre. En effet, la condition de contrainte nulle considérée à la surface de l'écoulement induit un cisaillement nul et donc prédit une viscosité apparente infinie à la surface (voir équation (2.30)). On peut alors s'interroger sur la capacité à extraire de l'information rhéologique à partir de données de vitesse de surface à travers un modèle rhéologique en loi de puissance. Des premières analyses de sensibilité quasi-statiques sur un écoulement idéalisé (stationnaire uniforme) montrent une très faible sensibilité du modèle à la couche limite de grande viscosité calculée par la loi de puissance (voir figures 5.2 et 5.3) et donc une bonne fiabilité des données de surface pour un contrôle rhéologique robuste de l'écoulement.

Des analyses de sensibilité du modèle à la consistance du fluide sur le profil radar du glacier Mertz s'avèrent riches et instructives ; elles permettent notamment de mettre en évidence les différents régimes d'écoulement (du Poiseuille au "pseudo-plug") rencontrés dans le domaine et le rôle de la modélisation thermique dans ces régimes d'écoulement (voir figures 5.5 et 5.6). On retrouve également la forte sensibilité au fond déjà observée sur le glacier Variegated (voir section 3.5). D'un point de vue expérimental, ce type d'analyse permet notamment de remarquer les zones d'écoulements proches d'un écoulement pseudo-piston. Ces zones sont connues pour être les meilleurs endroits où réaliser des prélèvements et carottages de glace ainsi que pour l'extraction de profils radar des couches "isochrones" (voir [120]).

On réalise finalement des expériences de reconstruction d'un exposant rhéologique uniforme et d'une consistance spatialement distribuée. L'identification de l'exposant rhéologique se montre très robuste et un résultat de très bonne précision est obtenu pour des données de vitesse de surface présentant un bruit de 50% (voir figure 5.4). Ce résultat ouvre des perspectives pour caractériser l'exposant rhéologique uniforme (constant dans le domaine) des écoulements de manière fiable à partir d'observations de vitesses de surface potentiellement plus accessibles et plus facilement réalisables qu'une mesure rhéométrique *in situ*. À l'inverse, l'identification de la consistance du fluide s'avère relativement difficile à réaliser, même en présence d'observations de bonne qualité et des aprioris physiques assez forts (tels qu'un profil vertical de température, voir section 5.8.1) doivent être introduits pour obtenir un résultat exploitable (voir figures 5.10 et 5.11). La difficile identification est due à une sensibilité relativement réduite du modèle au paramètre de consistance  $\eta_0$ . À condition de se placer à proximité d'un profil vertical de température réaliste, les variations verticales de  $\eta_0$  n'ont que peu d'influence sur la dynamique. Un couplage à la thermique dans l'exposant rhéologique, si opportun d'un point de vue physique, aurait un impact bien plus important et la méthode inverse une capacité renforcée à identifier ces effets.

De manière plus générale, cette étude propose l'utilisation de l'approche variationnelle inverse comme un outil solide sur lequel l'expérimentateur et le modélisateur peuvent s'appuyer. La difficulté connue des mesures rhéométriques de la consistance et de l'exposant rhéologique d'un fluide pourrait être soutenue et facilitée par une approche de "rhéométrie virtuelle" que nous proposons ici.

## 5.2 Introduction

Power-law fluids represent a wide category of geophysical material (e.g. ice, lava, mud, dense snow avalanches, clay, etc.). They often involve gravity-driven mass movements and are generally treated as fluids flowing down a slope (see e.g. [4]). These fluids show a complex and non uniform rheology which is generally hard to estimate in a real context and difficult to measure experimentally (see e.g. [35]).

The power-law type description leads to focus on the two undetermined parameters of such a law which are the exponent of the law and the rate factor or consistency.

In lava modeling, the question of the power-law index value is still under debate and has been widely discussed but the literature generally agrees on a pseudoplastic (shear-thinning) behavior of the magma with possible dependency of this exponent on temperature and/or crystal concentration (see e.g. [73]). In ice modeling, the first power-law index value is due to [59] and its temperature and shear rate dependency is a matter of debate (see e.g. [36], [150]).

The coupling with thermal physics also occurs in the definition of the consistency. For both ice and lava, different laws are used to evaluate this parameter but a common description is to consider an Arrhenius-type law including appropriate physical considerations (see e.g. [69] for ice and [32] for magma).

From these considerations, the numerical modeling of these flows combined with control methods represent a major component to determine the importance of the rheological description and the role of its parameters within the flow.

In regard to the identification of parameters in glaciology, [115] is generally considered to be one of the founding papers and a wide range of inverse methods and investigations have been developed since then. The use of variational methods, based on shallow-type simplifications of the power-law Stokes equations, to invert for the basal slipperiness and the consistency can be found in e.g. [147], [104], [170], [98],[94].

All of the above consider the ice viscosity to be independent of the velocity in their derivation of the adjoint model. This widely employed approximation leads to so-called "self-adjoint" methods. This method has been extended to the Stokes

system by [127].

The continuous exact adjoint equation system for the power-law Stokes problem is presented in [108] for a general optimal control framework and the optimal control problem is solved using a conforming three-field finite element description such as the one used here.

More recently the use of methods based on this exact adjoint have arisen in glaciology. In [133], they developed an adjoint-based data assimilation approach combined with an efficient algorithm to numerically infer input parameters for extensive 3D glaciological computations. In the present study, the algorithmic is different. Furthermore, we focus on the methodology for rheological control of the flow, based on sensitivity analysis, whereas [133] focuses on academic identifications of the basal slipperiness and the power-law exponent in order to probe the limits of invertibility of these parameters without paying attention to the sensitivities. Besides they do not perform identification of the consistency.

In a shallow approximation context, the use of an exact adjoint to infer basal slipperiness and comparison with the “self-adjoint” approximation can be found in [65].

It seems that the question of parameters identification using optimal control has almost never been addressed for lava flows (see [51] for direct matching of rheological parameters).

In any case, what one can obtain from an inverse approach is strongly correlated with the type and quality of available data. In this study we focus on surface velocity data due to the fact that this is generally the first accessible and potentially the only data in a geophysical context. However, a viscosity described using a power-law constitutive equation goes to infinity at the free surface (due to a vanishing shearing). Then the ability to recover rheological information on the flow from this type of observations is a priori unclear.

In the following study we develop the adjoint-based 3D-Var (steady state observations) method for power-law flows at low Reynolds number (i.e. Stokes approximation). We focus in the following on rheological inverse questions. Only steady state studies then are carried out. Unsteady simulations contingent on these prior analysis and calibrations can then be performed.

In a glaciological context, sensitivity analyses based on stochastic sampling methods can be found in [105] or [12] using large scale (shallow) approximations. The same type of sensitivity analyses in a lava flow context can be found in [19] (see also references therein). It should be pointed out that these studies are not focused on the sensitivity with respect to the rheological parameters. The main issue for these types of methods lies in the fact that a large number of forward simulations is

required to quantify how perturbations on the control variables propagate into the model.

Conversely, the use of an adjoint model provides a complete map of sensitivities in one single integration. Yet adjoint-based sensitivity analyses are less common since they require the possibly extensive derivation of the adjoint system of the flow model. In this situation, an efficient approach consists of the use of algorithmic differentiation in order to obtain the discrete counterpart of the adjoint problem. This approach is described thoroughly in [80] for large scale ice-sheet simulations. To the best of the author's knowledge, variational sensitivity analyses using the adjoint model of the power-law Stokes system have not been previously addressed.

In the ideal framework of a uniform stationary channel flow (representative of laboratory controlled flows), the sensitivity analysis shows that the model is rather insensitive to the rheological modeling close to a traction-free boundary and mostly sensitive to the rheology close to the bottom i.e. at a high shear rate. In a more complex, non uniform situation, using a radar-sensed 2D vertical profile of the Mertz glacier, the sensitivity analysis on the consistency is rich and instructive in terms of flow regimes. The presence of a larger temperature gradient between the bedrock and the surface contributes to a flow mainly subject to basal shearing. The sensitivity analysis allows us to detect areas which present a more distributed shearing over the thickness corresponding to a plug-like flow. These areas are well-suited for the drilling of an ice core or the radar measurement of a vertical isochrone layers profile.

Sensitivity analysis therefor offers perspectives to help define experimental protocols in regard to measurement location and quality. The 3D-Var data assimilation combined with sensitivity analysis therefore provides a methodology towards *virtual rheometry*.

In order to evaluate the identifiability of the the power-law exponent  $n$  and of the consistency  $\eta_0$ , we consider the methodology of twin experiments (i.e. identification using synthetic and possibly noisy data) which allows the reliability of a parameter identification to be quantified depending on the type and quality of the available data. The identification of a uniform power-law exponent in a uniform steady lava channel situation proves robust even in the presence of noisy observations (up to 50% here). The spatially distributed consistency is difficult to identify even in the presence of high quality observations, due to a generally low absolute sensitivity compared to the power-law index. These results suggest that our focus should be on the identification of the power-law exponent based on a trustworthy modeling of the consistency.

The study is structured as follows. The first part of this paper describes the continuous unsteady forward model, its discretization and the solving algorithm. The general framework of the variational inverse approach is developed in the se-



cond part. In the third part, we present analytical calculations of the solution of the power-law Stokes problem with non linear sliding at bottom for a steady uniform flow in a flat channel as well as the gradients of the corresponding cost function. In the fourth part, we address the question of the reliability of surface velocity observations in this uniform steady context through the sensitivity analysis of a locally defined power-law exponent  $n$ . In the fifth part, a globally defined power-law exponent is inferred. In the sixth part, sensitivity analysis and data assimilation results for a thermal-dependent consistency are presented. We conclude with the utilization of such a tool to support both the modeling and the experimental work.

### 5.3 Continuous and Discrete Forward Model

The model of the flow is identical to the one presented in chapter 4. Then, under the same notations, in the case of a prescribed velocity profile on the left open boundary  $\Gamma_l$  and a given stress (such as the hydrostatic pressure) on the right open boundary  $\Gamma_r$ , the forward power-law Stokes model with free-surface considered here is given by :

$$\mathbf{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{in } \Omega_t \quad (5.1)$$

$$-\mathbf{div}(2\eta(\mathbf{u})\underline{\mathbf{D}}) + \nabla p = \rho \mathbf{g} \quad \text{in } \Omega_t \quad (5.2)$$

$$|\sigma_{nt}|^{m-1} \sigma_{nt} = \beta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \quad \text{on } \Gamma_{fr} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{fr} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{u} = u_b \quad \text{on } \Gamma_{ad} \quad (5.5)$$

$$\underline{\sigma} \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_s \quad (5.6)$$

$$\mathbf{u} = u_l \quad \text{on } \Gamma_l \quad (5.7)$$

$$\underline{\sigma} \mathbf{n} = p_r \quad \text{on } \Gamma_r \quad (5.8)$$

$$\partial_t h + u_x \partial_x h = a + u_z \quad \text{on } \Gamma_s \quad (5.9)$$

The choice of the boundary conditions on the lateral boundaries is arbitrary but does not induce any loss of generality.

The solution of the continuous forward problem is obtain with the same algorithm as the one given in chapter 4 in section 4.4, 4.5.4 and the finite element discretization is given in section 4.5.5.

### 5.4 Numerical Inverse Tools

As an introduction to our numerical experiments, we describe, in this subsection, the principle of an adjoint-based inverse method, the meaning of sensitivity analysis

in terms of adjoint method and the methodology of twin experiments we will consider for the data assimilation experiments.

### 5.4.1 Basic Principles of a Variational Data Assimilation Process

The development of a sensitivity and parameter identification module for the present power-law Stokes problem is part of the DassFlow (*Data Assimilation for free surface Flow*) project which was originally designed for river hydraulics problems such as risk assessment in the case of flood (see [83]). We therefore use these previous developments to build the 3D-Var algorithm based on the optimal control theory and the adjoint equations.

The output of the model is represented by a scalar valued function  $j$  (called the *cost function*) which depends on the parameters of the model and evaluates a quantity to minimize.

In a data assimilation context, an integrated discrepancy between the computed state and an observed state (through any type of data) is part of the cost function. Otherwise, the cost function can represent the state of the system in a given local part, or its derivative (for stability analysis).

The parameters of interest are called *control variables* and constitute a control vector  $\mathbf{k}$ .

The control vector can include scalar or spatially distributed variables such as inflow and outflow, lateral stresses, basal slipperiness  $\beta$ , the rheological constant  $\eta_0$  and the rheological exponent  $n$ .

The optimal control problem reads :

$$\min_{\mathbf{k}} j(\mathbf{k}) \quad (5.10)$$

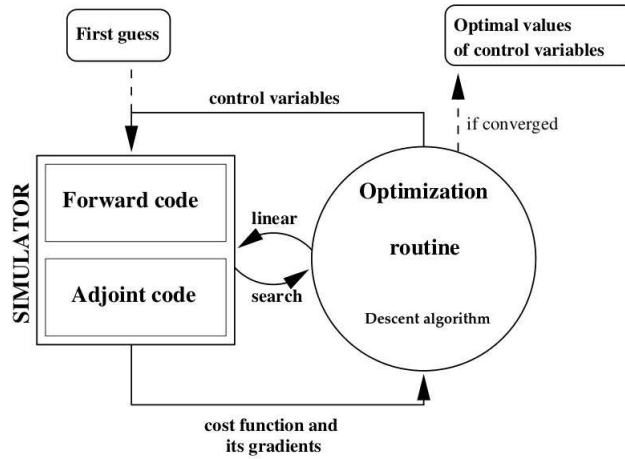
This optimization problem is solved numerically by a descent algorithm.

The gradient of the cost function then needs to be computed. This is done by introducing the adjoint model.

The minimizing procedure operates on this control vector to generate a set of parameters which allows a computed state, closer to the observations, to be obtained.

In the computations presented in next section we use the L-BFGS descent algorithm (a quasi-Newton method) implemented in the M1QN3 routine (see [57]). The global optimization process is represented in Figure 5.1.

Let us point out that every variable in the control vector is only a potential control variable. In practice, it is possible to identify only a few of them contempo-



**Figure 5.1:** Principle of a 3D-Var type variational data assimilation algorithm.

raneously.

### 5.4.2 Cost Function in Presence of Observations

Given velocity observations denoted  $u^{obs}$ , we define the cost function  $j$  which measures the discrepancy between the computed variable (state of the system) and the available data at a given time. Extra terms can be added to the definition of the cost function to include an a priori on the physics of the control variables and/or a regularization of the optimization problem :

$$j(\mathbf{k}) = \int \|Cu^{obs} - \mathbf{u}(\mathbf{k})\|_2^2 d\mathbf{x} + \text{regularization terms} \quad (5.11)$$

where  $\mathbf{u}$  is the computed velocity of the system and  $C$  is the observation operator.

### 5.4.3 Adjoint Model and Gradient Computation

In the case of DassFlow, the direct code is written in Fortran 95 and the adjoint code is derived using the automatic differentiation tool Tapenade (see [79]).

A single integration of the direct model (4.9)-(4.10) followed by a single integration of the adjoint model allow to compute all components of the gradient of the cost function.

We consider in the following as control variables the two adjustable parameters of the rheological law which are the consistency  $\eta_0$  and the power-law exponent  $n$ . Therefore, we set  $\mathbf{k} = (n, \eta_0)$  and we write the total differential  $dj$  of the cost function

$j$  as follows :

$$dj(\mathbf{k}) = \frac{\partial j}{\partial \eta_0}(\mathbf{k}) \cdot \delta \eta_0 + \frac{\partial j}{\partial n}(\mathbf{k}) \cdot \delta n \quad (5.12)$$

The output of the adjoint code corresponds to the partial derivatives of the cost function  $j$  with respect to the chosen control variables.

#### 5.4.3.1 Local Sensitivity Analysis

The sensitivity analysis allows to study how perturbations on the input parameters of a model lead to a perturbed output. The use of an adjoint model provides a local sensitivity analysis around a given point by computing the Fréchet derivative of the cost function  $j$  (e.g. defined by (5.11)) with respect to the control variables  $\mathbf{k}$ .

A perturbation  $\delta k_i$  on one parameter  $k_i$  of the set  $k$  generates a perturbation  $\delta j$  on the response of the model (requiring one integration of the model to be computed). Then, the sensitivity to this parameter  $k_i$  is easily computed :  $\delta j = \frac{\partial j}{\partial k_i} \delta k_i$ . But for  $n$  control parameters, such a method requires  $n$  integrations of the model to compute every gradient whereas one integration of the adjoint model provides directly the partial derivatives of the cost function *for every direction of derivation*  $\delta k_i$  (see equation (5.12)).

This sensitivity analysis tool is an important feature which provides a *better understanding of both the physics and the model* by quantifying the roles of the various physical parameters and the influences of parameter variations on the behavior of the system.

For the following inverse studies, we will restrict ourselves to steady state flows (i.e. for a domain  $\Omega$  fixed) thus providing *quasi-static* sensitivities.

#### 5.4.3.2 Data Assimilation and Twin Experiments

The methodology of twin experiments is used as a first step toward real data processing and calibration model. Twin experiments are as follows : reference parameters of the model  $k_{ref}$  are used to generate observations  $u_{obs}$ . Then, the goal is to retrieve the set of parameters  $k_{ref}$  starting from an initial guess  $k \neq k_{ref}$  using the minimization of the cost function  $j$ . Thus, the algorithm computes at each iteration  $i$  a new set of parameters  $k_i$  according to the gradient  $\frac{\partial j}{\partial k}$  in order to decrease the cost  $j_i = j(k_i)$ .

Twin experiments are an ideal framework where the only source of uncertainty comes from the unawareness of the parameters. Then, it plays a role of validation of the minimization procedure and yields information on its efficiency and on the robustness of the inverse problem.

In order to avoid the so called *inverse crime* (see e.g. [133]) and to simulate realistic situations, a random Gaussian noise is added to the synthetic data obtained from the numerical model.

## 5.5 Analytical Solution and Related Sensitivities

We present hereafter an analytical solution of the Stokes problem corresponding to a two dimensions power-law uniform stationary flow in a flat channel subject to basal sliding. In the case of no-slip at bottom, the solution is classical (see e.g. [20]). We develop it below in the case of the non linear sliding law (4.14). We use it to enhance our comprehension of the sensitivities (in term of cost function gradient) in this reference flow. It is also used as an inflow for our numerical simulations.

**Analytical Solution : Uniform Steady State Flow** The *permanent flow in a channel* is the steady ( $\partial_t \cdot = 0$ ) uniform ( $\partial_x \cdot = 0$ ) solution to the bidimensionnal viscoplastic Stokes problem on a given domain  $\Omega$  corresponding to an infinite channel with a flat bottom and a constant thickness  $h = H - b$  with an angle of inclination  $\theta$ . We consider the Weertman sliding law at bottom (defined by (4.14)). The stationary free surface condition on the upper surface corresponds to  $\underline{\sigma} \mathbf{n}|_{\Gamma_s} = 0$  and  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_s} = 0$ .

Under these hypotheses, system (5.1)-(5.6) in the "mean-slope" coordinate system  $(\bar{x}, \bar{z})$  writes :

$$\partial_{\bar{z}}(u_{\bar{z}}) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5.13)$$

$$\partial_{\bar{z}}(\underline{\mathbf{S}}_{\bar{x}\bar{z}}) + \rho g \sin(\theta) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5.14)$$

$$\partial_{\bar{z}}(\underline{\mathbf{S}}_{\bar{z}\bar{z}}) - \partial_{\bar{z}}p - \rho g \cos(\theta) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5.15)$$

$$\partial_{\bar{z}}(u_{\bar{x}}) - (2\eta_0)^{-n}(\underline{\mathbf{S}}_{\bar{x}\bar{z}})^n = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5.16)$$

$$(\underline{\mathbf{S}}_{\bar{x}\bar{z}})^m = \beta u_{\bar{x}} \quad \text{on } \Gamma_{fr} \quad (5.17)$$

$$u_{\bar{z}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{fr} \cup \Gamma_s \quad (5.18)$$

$$\underline{\mathbf{S}}_{\bar{x}\bar{z}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_s \quad (5.19)$$

$$p = 0 \quad \text{on } \Gamma_s \quad (5.20)$$

$$(5.21)$$

where  $\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{S}}_{xx} & \underline{\mathbf{S}}_{xz} \\ \underline{\mathbf{S}}_{xz} & \underline{\mathbf{S}}_{zz} \end{pmatrix}$  represents the deviatoric stress tensor in the mean-slope coordinate system and  $\underline{\mathbf{u}} = (u_{\bar{x}}, u_{\bar{z}})^T$  represents the velocity vector. We point out that equations (5.14)-(5.15) represent the conservation of momentum and equation (5.16) represents the power-law description. This sytem admits the following unique solution :

$$u_{\bar{x}}(\bar{z}) = \frac{(-\rho g \sin(\theta) h)^m}{\beta} + \frac{1}{1+n} (2\eta_0)^{-n} (\rho g \sin(\theta))^n (h^{1+n} - (H - \bar{z})^{1+n}) \quad (5.22)$$

$$u_{\bar{z}} = 0 \quad (5.23)$$

$$p(\bar{z}) = \rho g \cos(\theta) (H - \bar{z}) \quad (5.24)$$

From this analytical solution, we are able to compute explicit cost and sensitivity on such a flow. If we consider the following control vector :

$$\mathbf{k} = (\eta_0, n) \quad (5.25)$$

we have :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\eta_0, n; \bar{z}) = \mathbf{u}(\mathbf{k}; \bar{z})$ .

We call  $k_0$  a true state, a priori unknown, of the control variables, from which observations  $u^{obs}$  have been generated. In the case of observed surface velocities on the permanent flow (thus uniform in  $x$ ), we have :

$$u^{obs} = u^{obs}(\mathbf{k}_0; H) \quad (5.26)$$

Using (5.26), we set as the cost function  $j$  :

$$\begin{aligned} j(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} |\mathbf{u}(\mathbf{k}; H) - u^{obs}(\mathbf{k}_0; H)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left| \mathbf{u}(\mathbf{k}; H) - u^{obs}(\mathbf{k}_0; H) \right|^2 |\Gamma_s| \end{aligned} \quad (5.27)$$

where  $|\Gamma_s|$  represents the length of the free surface curve. Then we obtain for the gradient of the cost function  $j$  with respect to the vector of control variables  $\mathbf{k}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial j(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}{\partial \mathbf{k}} &= |\Gamma_s| \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \left( \frac{1}{2} \left| \mathbf{u}(\mathbf{k}; h) - u^{obs}(\mathbf{k}_0, \bar{z}) \right|^2 \right) + \frac{\partial |\Gamma_s|}{\partial \mathbf{k}} \\ &= |\Gamma_s| \left( \mathbf{u}(\mathbf{k}; H) - u^{obs}(\mathbf{k}_0; H) \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}; H) \\ &= \frac{\partial j}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; H) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Then, in this context, the sensitivity depends only on the parameters of the computed and observed state. In the more general context of any velocity field uniform

in  $\bar{x}$ , given uniform observations, the result would be independent of  $\bar{x}$  whatever the control variable.

A simple calculation shows that the gradient  $\partial \mathbf{u}(\mathbf{k}; \bar{z}) / \partial \mathbf{k}$  of the velocity field (5.22) choosing  $\mathbf{k} = n$ ,  $n$  being the power-law index, is not defined for  $\bar{z} = H$  (due to the term  $\log(H - \bar{z})$ , see equation (5.29)). As a matter of fact, we obtain :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(n; \bar{z})}{\partial n} &= (\rho g \sin(\theta))^{1+n} (h^{1+n} - (H - \bar{z})^{1+n}) \\ &\quad \frac{1}{1+n} (2\eta_0)^{-n} \left[ \frac{-1}{1+n} - \log(2\eta_0) + \log(\rho g \sin(\theta)) \right] \\ &\quad + \frac{1}{1+n} (2\eta_0)^{-n} (\rho g \sin(\theta))^{1+n} \\ &\quad \left( h^{1+n} \log(h) - (H - \bar{z})^{1+n} \log(H - \bar{z}) \right) \\ &\quad \underset{H}{\sim} h^{1+n} (K_1 + K_2 \log(h)) \end{aligned} \quad (5.29)$$

However, it admits a finite limit when  $\bar{z} \rightarrow H$ . Then it is continuously extendable at  $H$ . It means that in this uniform stationary flow case, the computation of the gradient with respect to the power-law index  $n$  using surface velocity observations defined by (5.27) makes sense.

Based on this result, we focus in next section on the computation of the gradient with respect to a spatially distributed power-law index  $n$  in a uniform stationary flow.

## 5.6 Are Surface Velocity Observations Reliable ?

In a general geophysical flow context, for instance in glaciology, surface velocities are a typical type of remote-sensed data. However, the power-law description is singular for shear-thinning fluids subject to a vanishing shearing. Indeed, the viscosity field  $\eta(\mathbf{u})$  corresponding to the uniform stationary flow (5.22) writes :

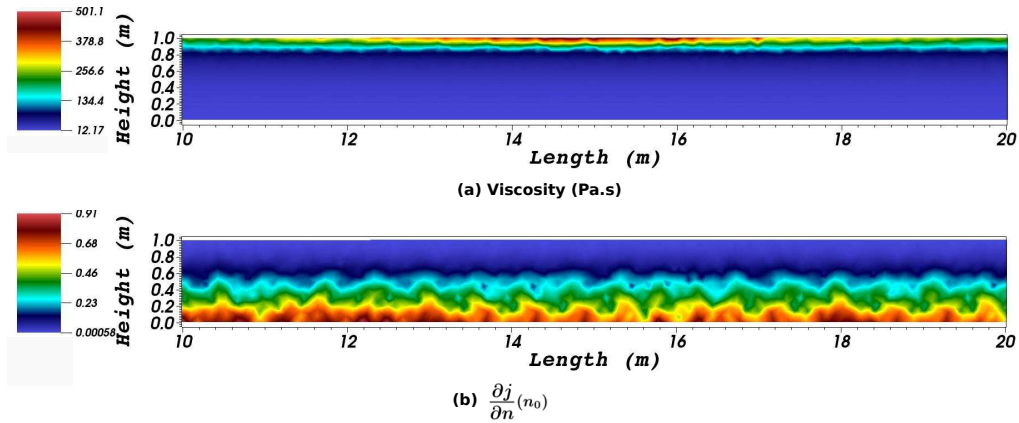
$$\eta(\bar{\mathbf{u}}) = \eta_0 (\partial_z u_{\bar{x}})^{\frac{1-n}{n}} \quad (5.30)$$

which goes to infinity when  $\partial_z u_{\bar{x}} \rightarrow 0$  (which occurs at free surface) and  $n > 1$  (shear-thinning case).

Then, to use such data to infer rheological parameters could lead to a singular behavior thus questioning the reliability of surface velocity data in such a case.

In order to address this question, given surface velocity observations only, we compute sensitivities with respect to a *locally defined* power-law exponent  $n$ .

We consider the flow occuring in a channel with flat bottom and constant thickness with an aspect ratio of 1/30 on a 10% slope. The inflow on the left boundary



**Figure 5.2:** Channel test case, uniform stationary flow. (a) computed viscosity field with  $n = 3$ . (b) sensitivity with respect to  $n$  (locally defined). The viscosity field shows an infinite viscosity at surface upper-bounded by the mesh cell size. The sensitivity has been computed around a state  $n_0 = 2$  using observations  $u^{obs}$  computed with  $n = 3$ . It decreases from bottom to surface. One observes a boundary layer of zero gradient at surface corresponding to the boundary layer of infinite viscosity. The gradient  $\partial j / \partial \eta_0$  computed in the same situation shows identical results.

is given by the analytical non-Newtonian Poiseuille type velocity field defined by (5.22). The boundary condition at outflow is a prescribed hydrostatic pressure. A stationary free surface flow, uniform with respect to  $x$ , is thus obtained.

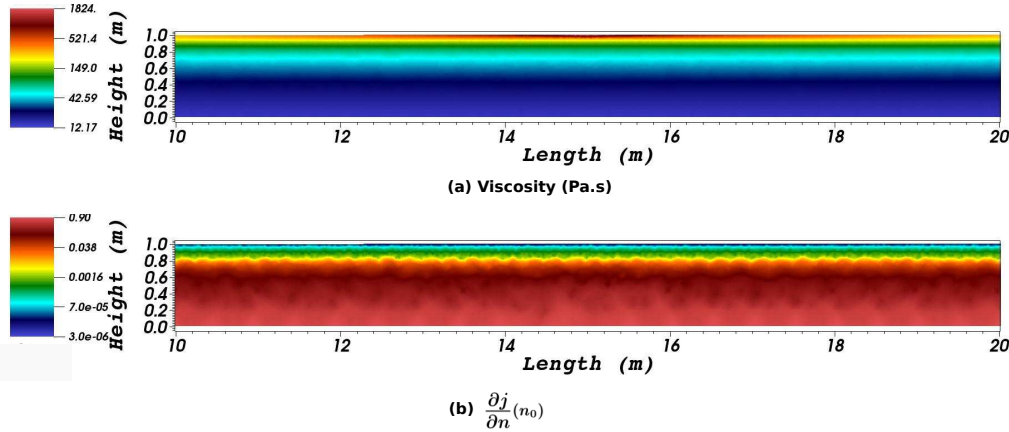
On Figure 5.2 are plotted the viscosity field computed on an isotropic mesh and the resulting sensitivity of the model with respect to the power-law index  $n$  constant by cell  $\partial j / \partial n(u_{obs}, n_0)$  using the cost function (5.27). The same quantities computed on a mesh refined close to the surface are plotted on Figure 5.3 using a logarithmic scale.

Figure 5.2 and 5.3 show a strongly increasing viscosity when approaching the free surface (it approximates infinite viscosity but the discretization induces a cut-off on the viscosity which depends on the size of the cells). One can notice a boundary layer of very high viscosity corresponding to an almost rigid zone.

For both meshes, the sensitivity  $\partial j / \partial n$  behaves identically (see Figure 5.2 and 5.3). It reaches a maximum value at bottom and decreases when approaching the free surface. We observe on Figure 5.3 a boundary layer of very low sensitivity corresponding to the boundary layer of very high viscosity. Therefore viscosity and sensitivity to the rheological exponent are highly correlated and the lowest sensitivity corresponds to the highest viscosity.

Note that a similar computation for the sensitivity with respect to the rheological





**Figure 5.3:** Channel test case refined at surface, uniform stationary flow. (a) computed viscosity field with  $n = 3$ . (b) sensitivity with respect to  $n$ . The mean cell size of the isotropic mesh is divided by 4 close to surface. The sensitivity has been computed around a state  $n_0 = 2$  using observations  $u^{obs}$  computed with  $n = 3$ . It is plotted using a log-scale. The colorbar does not reach the value of 1 because cell values has been interpolated on the vertices of the mesh.

factor  $\eta_0$  (see equation (4.8)) shows the same behavior (so that it is not plotted in the present paper).

Even if the law is ill-posed for zero shearing, these numerical results show that the area of singularity is irrelevant for both power-law index  $n$  and consistency  $\eta_0$ ; surface velocities are insensitive to a potential regularization that could be considered at the free surface boundary layer (such as a *cut-off* on the shear rate or a yield stress).

Then, we can state that surface velocity observations are reliable data to characterize a uniform power-law free-surface flow with no-slip condition at bottom.

According to the sensitivity plotted on Figure 5.3, the rheological behavior at high-shear rate (close to the bottom) is dominating in the flow and requires to be more precisely measured than the one at low shear rate.

In addition, one recover the result of the analytical calculation of equation (5.28); indeed an uniform sensitivity field with respect to the abscissae  $\bar{x}$  is obtained.

**Spatially varying exponent** Similar experiments have been performed using a spatially varying power-law exponent. The resulting flow is thus non uniform and the weighting of the gradient by the misfit has a stronger influence. However, the sensitivity results are qualitatively identical as the uniform case (and thus not shown) and the highest sensitivity is concentrated close to the bottom where the shear rate

is high.

## 5.7 Virtual Rheometry : Power-Law Exponent

From the results of the previous section, considering the reliability of surface velocity observations, we propose hereafter to use the data assimilation as a complementary numerical tool to support rheometrical investigations of power-law fluids such as laboratory measurements (see e.g. [31]) or estimation from real context data (see e.g. [51]).

We then present identification results of the power-law exponent  $n$  using noisy synthetic data. These numerical experiments lead to what can be called a *virtual rheometer*.

### 5.7.1 Flow Description

A channelled isothermal lava-type flow is considered in the following. The parameters of the computations are presented in Table 5.1 and corresponds to the bidimensionnal version of the flow resulting from Mount Etna eruption in 2001 given in [78]. The inflow is given by the analytical Poiseuille-like velocity (5.22) with no-slip boundary condition at bottom (which corresponds to an infinite basal slipperiness  $\beta$ ).

The generalized Reynolds number in the case of a power-law flow, using the parameters of Table 5.1 is given by :

$$\mathcal{Re} = \frac{\rho U^* H^*}{\eta_e} = \frac{\rho U^* H^*}{\eta_0 \left( \frac{U^*}{H^*} \right)^{\frac{1-n}{n}}} \approx 5 \times 10^{-4}. \quad (5.31)$$

Therefore, the Stokes approximation is suited for the simulation of this flow.

The present experiments are performed using two sets of surface velocities obtained from a power-law index target  $n_t = 2$ . These synthetic data are perturbed with a random Gaussian noise of 10% and 50% respectively.

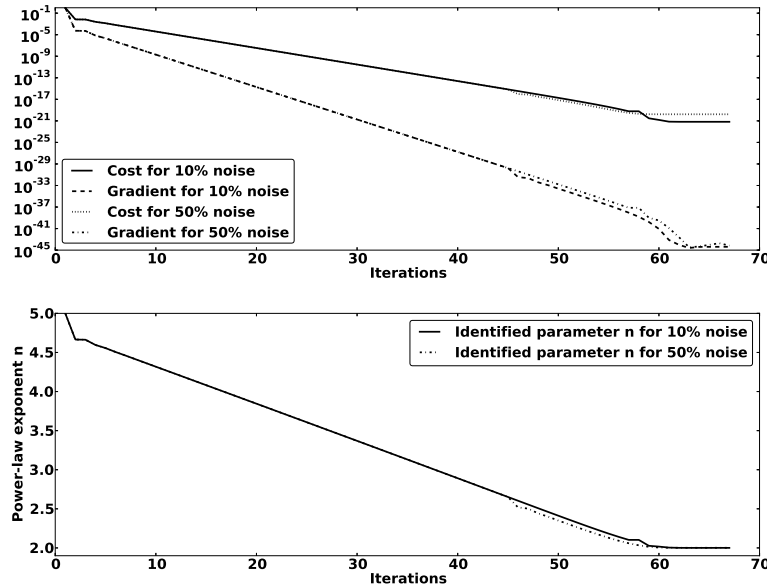
The cost function is defined by :

$$j(n) = \frac{1}{2} \int \left| u_s(n) - u_s^{obs}(n_t) \right|^2 d\bar{\mathbf{x}} \quad (5.32)$$

Since a scalar value is identified, there is no need for regularization.

Channel thickness	Average slope	Gravity	Consistency	Lava density
$h = 1.3\text{m}$	$\theta = 7.5^\circ$	$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$	$\eta_0 = 1.1 \times 10^4 \text{ Pa s}^{1/n}$	$\rho = 2030 \text{ kg m}^{-3}$

**Table 5.1:** Physical input parameters of the Etna-type lava channel.



**Figure 5.4:** Lava type flow : relative cost and gradient during the data assimilation cycle for different levels of noise. Identified  $n$  along the data assimilation cycle. Relative errors  $\varepsilon_n = \frac{|n_f - n_t|}{n_t}$  are :  $\varepsilon_n = 2.03 \times 10^{-4}$  and  $\varepsilon_n = 8.5 \times 10^{-4}$  for 10% and 50% of noise respectively.

### 5.7.2 Numerical Results

For both data sets, the decreasing of cost and gradient as well as the evolution of the power-law index value along the data assimilation process are plotted on figure 6, using as a first guess  $n_0 = 5$ .

Firstly, the almost linear decreasing of cost and gradient for each situation demonstrates the robustness of the process of identification of a scalar value.

What is also of importance is the extremely large decreasing of both quantities. Indeed, the cost decreases by around 20 orders of magnitude and the gradient by more than 40 orders of magnitude. This is due to the fact that the model is highly sensitive to the rheological exponent  $n$ ; a small variation of  $n$  induces a large variation of surface velocities. Thus, the initial cost, corresponding to the first guess  $n_0 = 5$ , is very large as well as the initial gradient.

This behavior has two main consequences.

On the one hand, it can be difficult to establish whether the converged solution has been reached or not, considering that in the general case, a decreasing of the cost by e.g. 10 orders of magnitude is already what one expect to be a very well converged solution. On the other hand, this extreme sensitivity can be very convenient. As one can see in Figure 5.4, the final calibrated values  $n_f$  are very close to the target value  $n_t$  even for 50% perturbed surface velocities. In fact, the level of noise has a minor influence on the final cost. Thanks to the high sensitivity, velocity data with large uncertainties are sufficient to recover the *uniform* value of  $n$ .

In addition, the *plateau* reached by the identified values of  $n$  at the end of the data assimilation cycle is helpful to overcome the difficulty of defining a threshold on the convergence.

The present inverse tool can be very useful when rheometric measurements are more difficult to access than velocities, or simply inaccessible, even for poorly observed velocities (such as e.g. extraterrestrial rheology estimation, see [155]).

## 5.8 Virtual Rheometry : Consistency $\eta_0$ (Temperature Dependency)

As we have seen in the previous section, surface velocities represent robust and reliable information to characterize the rheology of a uniform stationary flow. The present approach for the characterization of the power-law exponent led to a virtual rheometer. The other major component of a power-law description is the consistency  $\eta_0$  (see equation (4.8)), which is related, in the case of ice or lava, to coupled physical effects such as the composition (ice fabric or lava crystal fraction) or thermal physics. It can therefore be difficult to identify the dominant physical processes which govern  $\eta_0$  making it a difficult quantity to measure possibly resulting in inaccurate data. In addition to this, it is generally spatially non uniform and the location of potential measurement sites can be an issue.

This section focuses on the sensitivity analysis of the steady-state model with respect to a thermal-dependent consistency  $\eta_0(T)$  in order to observe and evaluate the role the temperature plays in the flow through this parameter. Then, following the idea of a virtual rheometer, identifications of this distributed parameter are performed using synthetic data for various noise levels.

To the best of our knowledge, the use of an exact adjoint method derived from a full-Stokes model on real glacier has not been performed.

### 5.8.1 Description of the Thermal Dependent Flow

The computational domain considered in the following is built from radar-sensed topography and bedrock of the Mertz ice-tongue in East Antarctica measured along a flowline (American program ICECAP 2010, see [67]). The present study focuses on the grounded part of the glacier which has an average thickness of 1km.

As well as lava, ice is considered as a pseudoplastic (shear-thinning) fluid. It is described by a power-law constitutive law called *Glen's flow law* which is generally considered temperature-dependent. In the case of a non-isothermal glacier, the temperature field is generally obtained using a coupled thermo-mechanical model for the ice. In the sequel, a steady-state temperature profile with a zero accumulation term, which corresponds to a linearly decreasing temperature  $T$  with respect to the height  $\bar{z}$  is considered (see e.g. [165]) :

$$T(\bar{z}, \lambda) = T_s - \lambda \bar{z} \quad (5.33)$$

with  $T_s$  the surface temperature and  $\lambda$  the basal temperature gradient. It can take a large range of values but a typical one for east Antarctica can be  $\lambda = 0.02\text{K/m}$  corresponding to a difference of  $20^\circ\text{C}$  between the surface and the bottom for a 1km thick glacier (see [85]). A typical value for surface temperature can be  $T_s = 233.15^\circ\text{K}$ .

The consistency  $\eta_0(T)$  is obtained from the thermal law given in [69] which writes as follows :

$$\eta_0(T) = \eta_r e^{-\frac{Q}{RT}} \quad (5.34)$$

where  $\eta_r$  is the reference viscosity,  $R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  is the gas constant and  $Q$  stands for the activation energy. In glaciology, the power-law exponent  $n$  is generally taken equal to 3 and in this case, the values of  $\eta_r$  and  $Q$  are given by :

$$B_0 = \begin{cases} 3.985 \times 10^{-13} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-3} & \text{if } T \leq 263.15 \text{ K} \\ 1.916 \times 10^3 \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-3} & \text{if } T > 263.15 \text{ K} \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} 60 \text{ kJ mol}^{-1} & \text{if } T \leq 263.15 \text{ K} \\ 139 \text{ kJ mol}^{-1} & \text{if } T > 263.15 \text{ K} \end{cases}$$

This Arrhenius-type law is very similar to the type of law that can be considered for lava (see e.g. [32]).

The system of equations describing this flow is the one defined by (5.1)-(5.7) At the upstream left boundary, the Dirichlet inflow condition is computed from equation (5.22). At bottom one consider either a no-slip boundary condition or a linear sliding (i.e. with exponent  $m = 1$ , see equation (4.14)). The pressure imposed on the right boundary  $\Gamma_r$  is the ice pressure. The flow parameters are presented in Table 5.2. The range of values given for the consistency field corresponds to  $\eta_0^t = \eta_0(T)$  computed with a temperature  $T = 273.15 - 0.02\bar{z}$ .

<i>Thickness of the inflow border</i>	<i>Average slope</i>	<i>Gravity</i>
$h = 945 \text{ m}$	$\theta = 1.15^\circ$	$g = 9.756 \times 10^{15} \text{ m a}^{-2}$
<i>Consistency</i>	<i>Ice density</i>	
$\eta_0^t \in [0.263; 0.644] \text{ MPa a}^{1/3}$	$\rho = 9.138 \times 10^{-19} \text{ Mpa a}^2 \text{ m}^{-2}$	

**Table 5.2:** Physical input parameters for the Mertz glacier flow.

First are presented sensitivity analyses around various points depending on the basal temperature gradient  $\lambda$  followed by identifications of the target consistency field  $\eta_0^t$ .

### 5.8.2 Sensitivity With Respect to $\eta_0$

Situations of adherence and sliding at the bedrock are compared hereafter. It can make an important difference in terms of sensitivity with respect to  $\eta_0$  by influencing the flow regime.

The following sensitivity results has been computed around a reference value  $\eta_0^s = \eta_0(T_s)$  which corresponds to a consistency field evaluated for a constant temperature  $T$  taken equal to the surface temperature  $T_s$  (i.e corresponding to  $\lambda = 0$ ).

#### 5.8.2.1 No-Slip Case

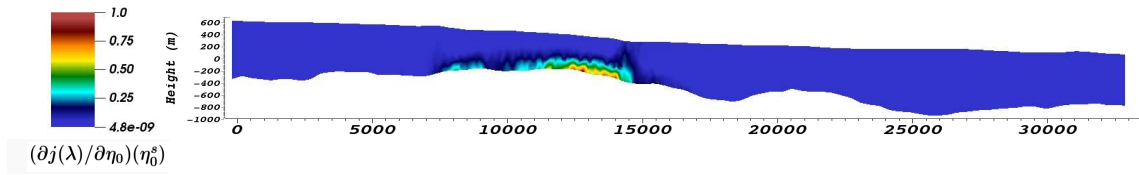
Adherence is considered at bottom (i.e. a frozen bed) and the temperature field is defined by (5.33). The cost function  $j$  is defined by :

$$j(\lambda) = \frac{1}{2} \int \left| u_s(\eta_0^s) - u_s^{obs}(\eta_0(T_s, \lambda)) \right|^2 d\mathbf{x} \quad (5.35)$$

where  $\lambda$  represents the basal temperature gradient. Then, four synthetic data sets corresponding to observed surface velocities  $u_s^{obs}(\eta_0(T_s, \lambda))$  with  $\lambda = 0, 0.01, 0.02, 0.03$ . (i.e. for a range of temperature differences between surface and bottom varying from  $0^\circ\text{C}$  to  $30^\circ\text{C}$ ) are computed.

The sensitivity of the model with respect to the consistency  $(\partial j(\lambda)/\partial \eta_0)(\eta_0^s)$  for  $\lambda = 0.02$  is plotted on Figure 5.5. The three other cases (i.e.  $\lambda = 0, 0.01$  and  $0.03$ .) are not plotted since the results are qualitatively identical.

A high sensitivity area is located around  $x = 1.5 \times 10^4 \text{ m}$  which happens to be a zone of high velocities (due to the presence of the bump). What is of further interest is that the highest sensitivity is concentrated close to the bottom. The behavior is then quite close to the one observed in the sensitivity to the power-law index in the channel : the model is more sensitive to the consistency in areas of high velocity



**Figure 5.5:** Glacier flow with no-slip at bottom : sensitivity with respect to the consistency  $(\partial j(\lambda)/\partial \eta_0)(\eta_0^s)$  around the state  $j(\eta_0^s)$  (i.e. for an isothermal fluid at surface temperature). Surface velocity observations computed using equation (5.34) for a basal temperature gradient  $\lambda = 0.02$ .

(due to the weighting of the cost function by the misfit, see equation (5.28)) and it is also more sensitive at low viscosity (high shear rate) and thus close to the bottom, even if the highest velocities occur at surface. The role of the misfit then remains negligible compared to the role of the model (see equation(5.28)).

The fact that the sensitivity maps remain the same for the four data sets means that the presence of an underlying thermal physics process barely affect surface velocities.

However, as will be further discussed, this interpretation is not complete in the case of basal sliding. In fact, the distribution of the sensitivity will be highly correlated to the distribution of the shear rate and thus to the flow regime.

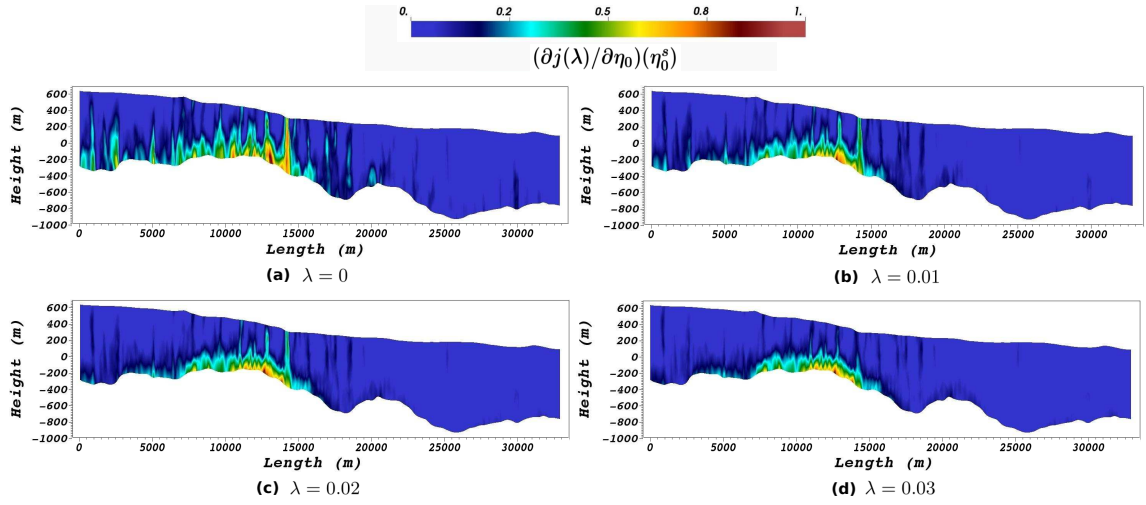
### 5.8.2.2 Sliding Case

The same four sensitivity experiments are performed considering basal sliding. The data sets are computed using a uniform value for the basal slipperiness :  $\beta = 10^{-3} \text{ MPa a m}^{-1}$ . This value is the same as the average value used in [132] and corresponds to an intermediate to high sliding ; it leads to a slip ratio (i.e. ratio between bottom and surface velocities) of approximatively 0.75.

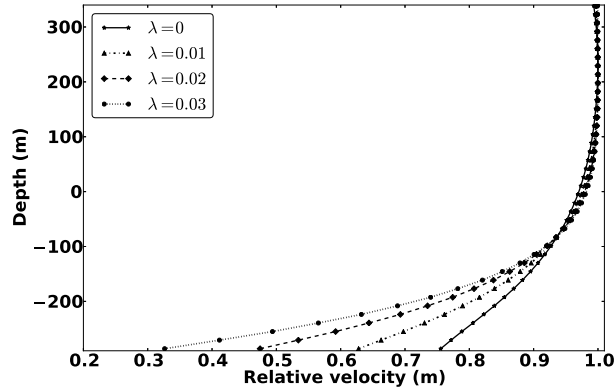
The gradients  $(\partial j(\lambda)/\partial \eta_0)(\eta_0^s)$  related to the four data sets (corresponding to the four basal temperature gradients  $\lambda$ ) are plotted on Figure 5.6.

In the sliding case, the area of high gradient remains mostly concentrated around the bump at  $x = 1.5 \times 10^4 \text{ m}$  where velocities are high but it does not remain confined to the bottom, depending on  $\lambda$ .

For the highest value  $\lambda = 0.03$  (i.e. a difference of  $30^\circ \text{C}$  between surface and bedrock), the sensitivity is still concentrated at bottom but the decreasing of  $\lambda$  induces a propagation of the high sensitivity along the ice column.



**Figure 5.6:** Glacier flow with intermediate basal sliding : sensitivity with respect to the consistency  $(\partial j(\lambda)/\partial \eta_0)(\eta_0^s)$  around the state  $j(\eta_0^s)$  (i.e. for an isothermal fluid at surface temperature). Surface velocity observations computed using equation (5.34) for different values of the basal temperature gradient  $\lambda$ .



**Figure 5.7:** Glacier flow with intermediate basal sliding  $\beta = 10^{-3} \text{ MPa a m}^{-1}$  : Horizontal velocity profile computed at  $x = 1.5 \times 10^4 \text{ m}$  for different values of  $\lambda$ . Velocities has been rescaled to a maximum velocity of 1.

This trend is related to a change in the shear rate distribution over the depth depending on  $\lambda$ . Figure 5.7 shows the computed horizontal velocity profiles at  $x = 1.6 \times 10^4 \text{ m}$  corresponding to the various  $\lambda$ .

The increasing of  $\lambda$  induces a “convexification” of the velocity profile i.e. a smaller slip ratio leading to an increased shear rate gap between the bottom and the surface. In other words, the closer the flow is to a plug flow (i.e. close to a constant shear rate over the thickness), the less the sensitivity is confined to the bottom.



### 5.8.2.3 Discussion

In the case of a no-slip boundary condition at bottom, the basal shear rate is dominant. Therefore the control of the flow can be achieved through an accurate quantification of its rheological parameters at high shear rate.

When basal sliding occurs, the shear rate distributes over the depth and the knowledge of the local rheology is then required for a larger range of shear rate. Conversely, the use of a thermal profile results in the concentration of the shear rate at bottom. Indeed, a larger temperature gradient between the bedrock and the surface induces a larger viscosity gradient and consequently a larger velocity gradient. The presence of strong thermal physics (i.e. a large temperature gradient) then contributes to hide a potentially rapid sliding zone.

Consequently, due to either a quite high sliding, with or without thermal effects, or combined effects of sliding and isothermal physics, a distributed sensitivity over the thickness indicates a local plug-type flow regime. The sensitivity analysis on  $\eta_0$  should be combined with sensitivity analysis on the basal slipperiness  $\beta$  to distinguish combined effects of these quantities and observe the different regimes occurring in the flow (from Poiseuille to plug). Such an analysis can support experimental and field work by helping define areas of interest and potential measurement sites.

The best place for an ice core record is known to be near an ice divide because of a generally negligible horizontal velocity (see [36]). The formation of isochrones arches under ice divide is known as the *Raymond effect*. As established by [131], it is easier to interpretate radar-sensed isochrone layers and to derive their shapes from analytical calculations assuming a plug flow as the bedrock geometry does not affect the slope of the isochrone layer. More generally, a more plug-like flow reduces the Raymond effect and thus the influence of the bedrock geometry (see [120]).

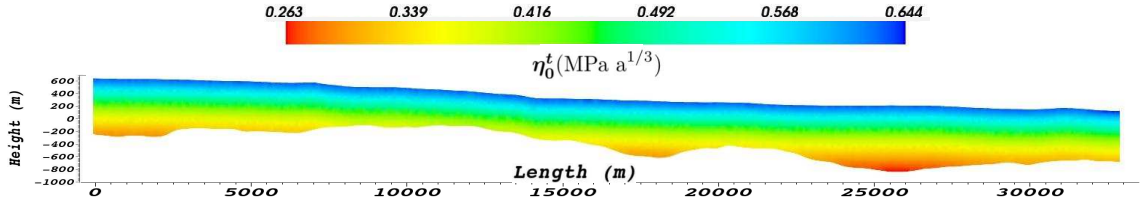
### 5.8.3 Identification of $\eta_0$ Based on Surface Velocity Observations

The following section is dedicated to the identification of the bidimensional consistency field  $\eta_0^t(T)$  given in Table 5.2. It is computed using the linear thermal relation (5.34) with a temperature field obtained with  $\lambda = 0.02$  and plotted on Figure 5.8. The flow remains identical as in section 5.8.1 with no-slip at bottom.

The cost function used for the identification is defined by :

$$j(\eta_0) = \int_{\Gamma_s} \|u_s^{obs} - u_s(\eta_0)\|_2^2 d\mathbf{x} + \mathcal{T}(\nabla\eta_0) \quad (5.36)$$

where the synthetic data  $u_s^{obs}$  are the horizontal surface velocities perturbed with a random Gaussian noise of varying level  $\delta$ . The term  $\mathcal{T}(\nabla\eta_0)$  called Tykhonov's



**Figure 5.8:** Target consistency field  $\eta_0^t$  computed from (5.34) and 5.8 with  $\lambda = 0.02$ .

regularization controls the oscillations of the control variable gradient. It is defined by :

$$\mathcal{T}(\nabla \eta_0) = \gamma_1 \int_{\Gamma_s} \|\partial_x \eta_0\|_2^2 ds + \gamma_2 \int_{\Gamma_s} \|\partial_z \eta_0\|_2^2 ds \quad (5.37)$$

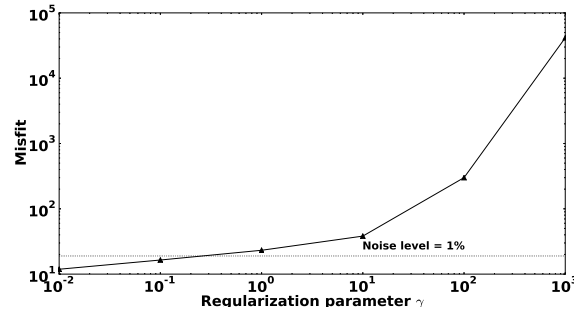
where the parameters  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  quantify the strength of the imposed smoothness. This term plays a role of convexification for the optimal control problem and thus restricts the region of admissible parameters  $\eta_0^f$  to smoothly varying fields. The tuning of these weights can be achieved from various considerations generally related to the quality of the data (or the noise level) and the degree of smoothness on the control variable one seeks. A classical approach, refereed as the Morozov's discrepancy principle, consists in choosing  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  such that the final cost  $j(\eta_0^f(\gamma))$  matches the noise level on the data.

### 5.8.3.1 Naive Approach

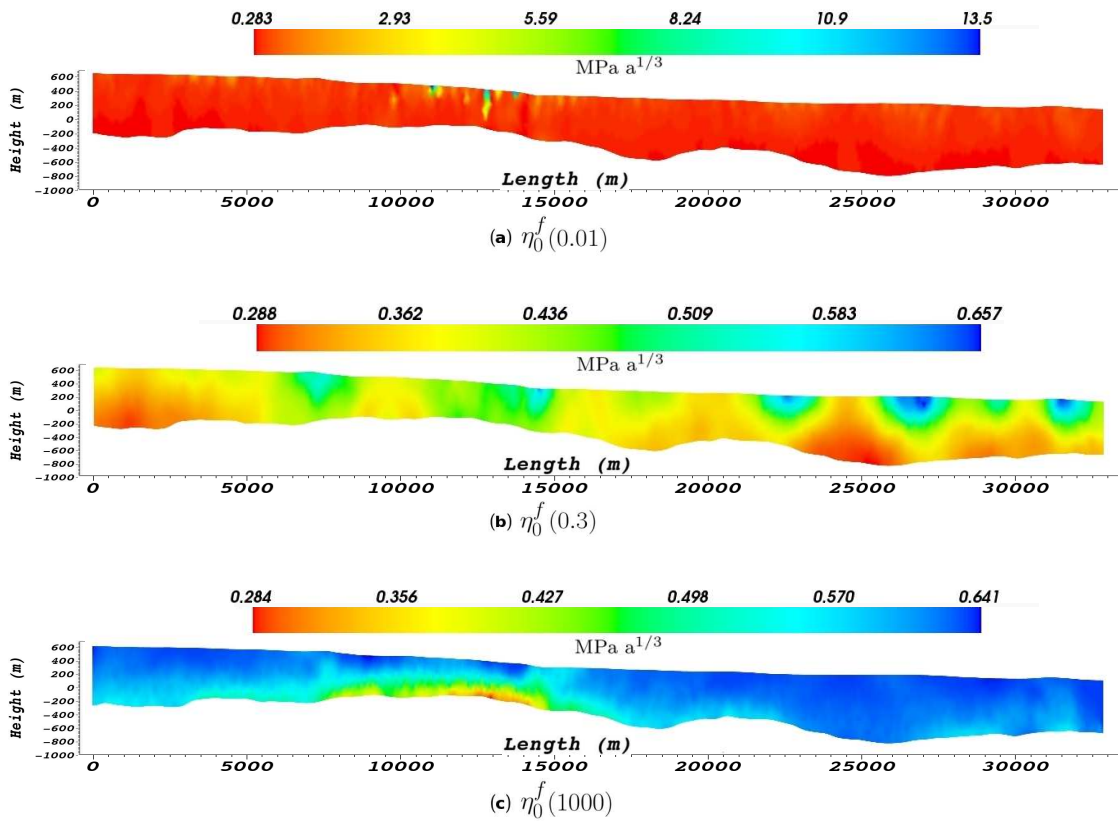
The idea of this experiment is to perform the identification of  $\eta_0$  with small prior physical considerations, relying mostly on the adjoint equations and the observed state. The importance of the thermal physics in the glacier is a priori unknown and the information one has on its behavior is contained in the surface velocity measurements. Based on theses observations, it seems reasonable to focus on the misfit term in the cost function with small regularization parameters.

The regularization is considered isotropic ( $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ). The first-guess  $\eta_0^0(T) = 0.426 \text{ MPa a}^{1/3}$  is the value obtained using relation (5.34) with a constant temperature field  $T = 253.15^\circ\text{K}$ . The data  $u_s^{obs}$  are perturbed with a 1% white noise and are plotted on Figure 5.12. The lack of robustness of this experiment leads to consider a relatively small noise compared to the one used previously in the power-law index identification.

Several identifications are performed for  $\gamma$  ranging from  $10^{-2}$  to  $10^3$ . The resulting costs with respect to  $\gamma$  are plotted on Figure 5.9 as well as the the noise level. Three selected resulting consistency fields  $\eta_0^f(\gamma)$  are plotted on Figure 5.10.



**Figure 5.9:** Illustration of the Morozov's discrepancy principle. The final misfit  $j(\eta_0^f(\gamma))$  is plotted with respect to the regularization parameter  $\gamma$ . The noise level indicates the value of the misfit  $j(\eta_0^t)$  (i.e. using the target consistency and the perturbed surface velocity data).



**Figure 5.10:** Glacier flow with no-slip at bottom : identified field  $\eta_0^f(\gamma)$  for (a)  $\gamma = 0.01$  (small regularization) (b)  $\gamma = 0.3$  (best regularization according to Morozov's discrepancy principle (Figure 5.9) (c)  $\gamma = 1000$  (strongly regularized case). The synthetic data are perturbed with a 1% noise.

In the view of Figure 5.9, for  $\gamma$  small ( $\gamma \leq 10$ ), the resulting misfit  $\int_{\Gamma_s} \|u_s^{obs} - u_s(\eta_0)\|_2^2 d\mathbf{x}$  is low and overfitting happens for  $\gamma \leq 0.3$ . Thus, the principal available information about the physics considered in this experiment (i.e. the surface velocities) has been strongly taken into account. Yet, the identification results are not satisfying. The relative errors between the target  $\eta_0^t$  and the final calibrated consistencies  $\eta_0^f(\gamma)$  are quite far from the target one as one can see in Table 5.3. This behavior suggests several interpretations.

Firstly, in the case of  $\gamma = 0.01$ , the relative error between target surface velocities and calibrated surface velocities is :  $\left( \int_{\Gamma_s} \|u_s^{obs} - u_s(\eta_0^f)\|_2^2 d\mathbf{x} \right) / \left( \int_{\Gamma_s} \|u_s^{obs}\| d\mathbf{x} \right) \simeq 2.45 \times 10^{-7}$ . As an example, we plot on Figure 5.12 the resulting velocities of the identification process with a 1% noise and  $\gamma = 10^{-2}$ .

Despite the fact that the final misfit is smaller than the actual noise (overfitting), this result represents a major component of data assimilation that can be called *equifinality* of the system ; an identical end state can be reached by different sets of parameters. In this situation, defining the end state as the horizontal surface velocities,  $\eta_0^t$  and  $\eta_0^f$  lead to the same ending. It means that the inverse problem is ill-posed. Therefore, it is essential to introduce regularization in the cost function to convexify the optimal control problem, thus defining a “trust region” containing smoothly varying parameters.

Yet, the optimally regularized solution (according to Morozov’s discrepancy principle) is not correct either ; this behavior can be explained from the choice of an isotropic regularization. By definition,  $\eta_0^t$  is linearly increasing from top to bottom, which results in a small horizontal gradient and a larger vertical one (see equation (5.33)). The isotropic regularization identically weights the gradients in both directions. Then, the layered aspect of  $\eta_0^t$  cannot be fully recovered from the identification process. This result is another important component of data assimilation ; it demonstrates the fact that the regularization term is a modelling component for the optimal control problem and its definition must reflect prior knowledge of the input parameters.

The other crucial quantity that defines the region of admissible parameters is the initial guess considering that the descent algorithm used here is obviously local. A uniform first-guess equal to the average value of the target  $\eta_0^t$  was used here. It seems acceptable but the next experiment demonstrates that a more pertinent choice is necessary to better identify the consistency.

<i>Regularization</i> $\gamma$	$10^{-2}$	$3.10^{-1}$	1	10	100	1000
<i>Relative error</i>	0.84	0.19	0.22	0.25	0.31	0.39

**Table 5.3:** Relative error  $\frac{\|\eta_0^f - \eta_0^t\|_2}{\|\eta_0^t\|_2}$  between the reconstructed rheological constant and the target one for a noise level  $\delta = 1\%$  on the surface velocity data and regularization parameter  $\gamma$  ranging from  $10^{-2}$  to  $10^3$ .

### 5.8.3.2 Approach Based on Prior Physical Considerations

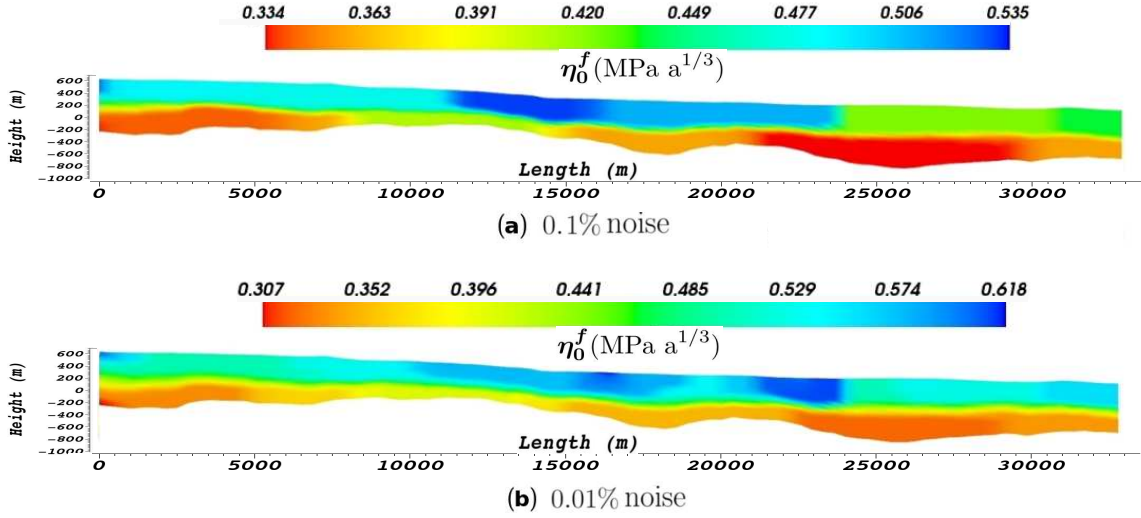
To overcome the ill-posedness of the optimization problem, one can introduce in the cost-function physical *a priori* on the consistency field. On the one hand, the regularization can be improved by taking different values for  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  considering that the directional derivatives of  $\eta_0^t$  are not identical. Assuming the vertical profile of the temperature field  $T$ , the ratio between  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  for the present target and mesh  $\eta_0^t$  is such that :  $\int_{\Gamma_s} \|\partial_x \eta_0\|_2^2 ds \approx \frac{1}{7} \int_{\Gamma_s} \|\partial_z \eta_0\|_2^2 ds$ . The following identifications are then performed with  $\gamma_1 = \gamma_2/7$ .

On the other hand, one can think of a better first-guess than an average uniform value, based on the sensitivity analysis. Indeed, from section 5.8.2, the sensitivity with respect to  $\eta_0$  appears to be generally higher close to the bottom. Then, one can take as a first-guess the value corresponding to  $\eta_0^t$  at the surface. Thus, the minimizer will mainly work on the consistency at bottom (which is more sensitive), keeping the one at surface close to the first-guess, i.e. close to the target value. From a practical point of view, this choice makes sense since the temperature at surface is relatively easy to access compared to the temperature field in the ice-sheet. Thus, being confident in the thermal law used to compute  $\eta_0(T)$ , this choice is convenient and numerically robust. In the present case, the corresponding value for the consistency is  $\eta_0^0 = 0.644 \text{ Mpa a}^{1/3}$ .

The relative errors between the reconstructed consistencies  $\eta_0^f$  and the target  $\eta_0^t$  are given in Table 5.4 for  $\gamma$  ranging from  $10^{-4}$  to 1. Figure 5.11 shows the two best (according to Morozov's discrepancy principle) identified consistency fields  $\eta_0^f$  for noises of 1% and 0.1% on the surface velocity observations  $u_s^{obs}$  corresponding to  $\gamma_1 = 10^{-2}$  and  $\gamma_1 = 10^{-4}$  respectively.

The relative errors given in Table 5.4 show a significant improvement for the 1% noise situation compared to the previous approach and the results obtained for the 0.1% noise are distinctly more accurate than those obtained with a 1% noise, especially close to the surface where the sensitivity is lower.

Again, the reachable consistencies are small and correspond to computed surface



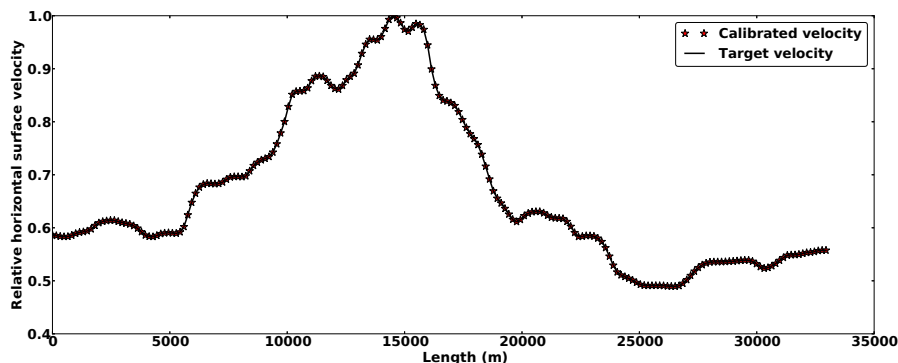
**Figure 5.11:** Glacier flow with no-slip at bottom : Identified field  $\eta_0$  obtained using anisotropic regularization and surface consistency as a first-guess for (a) 0.1% noise on the data. (b) 0.01% noise on the data. The range of values has been rescaled between 0 and 1.

velocities very close to the observations (for  $\gamma_1$  small enough). This approach, by including the physics of the problem and prior knowledge of the model parameters into the cost function, demonstrates the ability for this process to reconstruct the thermal-dependent consistency  $\eta_0^t$ .

The same runs were performed using a different first guess (average value  $\eta_0^0 = 0.426 \text{ Mpa a}^{1/3}$ ). The resulting consistency field was comparable in terms of relative errors with those obtained with the naive (isotropic regularization) approach. It means that, in this situation, the inability to recover e.g. the layered aspect of  $\eta_0^t$  was not mainly due to the isotropic regularization; here, the optimally computed solution depends more on the choice of the first-guess  $\eta_0^0$  than on the choice of the regularization parameters .

Despite these observations, the relative errors remain quite high considering the noise levels and the strong knowledge on the target introduced here.

This issue is explained from the sensitivity analysis ; it is due to the fact that the relative sensitivity with respect to  $\eta_0$  is actually low compared e.g. to the sensitivity with respect to the power-law index (approximately  $10^4$  times smaller in this case). Thus, the equifinality is all the more noticeable (a very sensitive parameter will be less subject to equifinality). The problem is ill-posed and one needs to combine a good first-guess and a pertinent regularization to retrieve, even partially, the expected result. Consequently, the identification of  $\eta_0$  proves to be a difficult task and the results need to be considered with caution.



**Figure 5.12:** Normalized horizontal surface velocities : the plain line represents the target surface velocities of the glacier flow considered in section 5.8.3 perturbed with a 1% Gaussian noise. The stars represent the computed surface velocities after identification.

These results suggest that the role of the thermal physics through consistency modeling is minor compared to other parameters such as the basal slipperiness or the power-law index. Therefore, the solving of a high precision model for the temperature field could be pointless and an assumed temperature profile is generally sufficient. Consequently, it suggests that the identification of the parameter  $\eta_0$  is not of primary interest to adjust the model.

A more robust approach for a local calibration of the rheology in the fluid would be to consider a reliable modeling of the consistency (such as relation (5.34)) and to focus then on the identification of a locally defined power-law exponent  $n$ . Such an assimilation allows to investigate similar rheological questions such as the role of thermal physics, the anisotropy or the fabric ; these questions arise for ice and lava as well as other geophysical fluids.

More generally, the definition of the cost function, by including prior physical considerations, is of great importance in data assimilation since most of physical-based optimal control problems are ill-posed and the solution provided by the process results from the choice of the cost function.

Thus it seems important to recall that beyond the modeller’s skills, every user should rely on the sensitivity analysis to understand and improve the contents of the cost function in order to infer what one expects to be the “true state”.

## 5.9 Conclusion

We have presented the development of an adjoint-based data assimilation tool for power-law geophysical flows occurring at low Reynolds. Using three-field finite

<i>Regularization parameter <math>\gamma_1</math></i>	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$
$\delta = 1\%$	0.204	0.182	0.138	0.151	0.201
$\delta = 0.1\%$	0.091	0.096	0.106	0.174	0.210

**Table 5.4:** Relative error  $\frac{\|\eta_0^f - \eta_0^t\|_2}{\|\eta_0^t\|_2}$  of the reconstructed rheological constant for noise levels  $\delta = 1\%$  and  $\delta = 0.1\%$  for different values of the regularization parameter  $\gamma$ .

elements and an adaptable and robust augmented lagrangian algorithm, we have investigated the question of the role of the power-law rheology for these type of flows.

The present approach relies on the sensitivity analysis as a helpful tool for the modeling work. First, we developed an analytical solution for a steady uniform power-law flow encountering non linear basal sliding and the corresponding gradients in order to highlight the main components of the gradients in this reference flow. It was then used to interpretate the sensitivity results. This Poiseuille-like flow was also used as an inflow boundary condition for the simulations.

Based on sensitivities to a locally defined power-law index, the pertinence and reliability of surface velocity observations in the same uniform channeled context were established ; this type of observation allows a robust characterization of a power-law behavior for this type of flow. In addition, we recover the results of the analytical study on the uniform flow.

From these results, we developed a methodology to perform virtual rheometry using a uniform channeled lava-type flow and a non uniform ice-type flow with real topography and surface data. We began by applying this method to estimate the power-law exponent of the flow using very noisy surface velocity observations. As demonstrated, the method is very robust in determining the power-law exponent  $n$  in a quasi-uniform steady context. From a mathematical and numerical perspective, the methodology remains identical for more complex flows (multiphysics, anisotropic, etc.) and should be tested in such cases.

Secondly, sensitivity analyses and identifications of the consistency  $\eta_0$  were performed.

The sensitivity analysis proved its ability to highlight the different regimes occurring in the non-uniform ice flow case. These analyses can be considered to be a strong asset to define areas of interest in a real flow in terms of regimes. However, the calibration of this quantity remains quite difficult because of a relatively small sensitivity inducing an ill-posed inverse problem. A well-suited methodology based on physical considerations and sensitivity analysis is required and the results of such a process should be handled with care. If pertinent from a mechanical point of view,



the modeling of thermal effects through a spatially varying power-law exponent (suggested for example by [73] for lava modeling) would have a stronger influence on the flow resulting in a facilitated identification process.

### **Acknowledgments**

This work was partially supported by PRES Toulouse, with the PhD fund of the first author. The authors want to thank Benoit Legrésy (LEGOS) for his data on the Mertz glacier and Ronan Madec (IMT) for his help on the development of the adjoint model. This work was also supported by Agence Nationale de la Recherche through ADAGe project No. ANR-09-SYSC-001.

# 6

## Sur la précision du gradient et la nécessité d'un adjoint exact

---

6.1	INTRODUCTION . . . . .	149
6.2	ADJOINT EXACT, MÉTHODE DE L'ACCUMULATION RETOUR ET AP- PROXIMATION "AUTO-ADJOINTE" . . . . .	151
6.2.1	<i>Précision de l'approximation "auto-adjointe"</i> . . . . .	152
6.2.2	<i>Troncature de l'accumulation retour</i> . . . . .	154
6.3	IDENTIFIABILITÉ DU COEFFICIENT DE FRICTION . . . . .	156
6.3.1	<i>Écoulement quasi-uniforme</i> . . . . .	157
6.3.2	<i>Écoulement sur topographie réelle du glacier Mertz</i> . . . . .	165
6.4	DENSITÉ DES DONNÉES . . . . .	170
6.5	CONCLUSION . . . . .	171

---

Ce chapitre traite de l'évaluation numérique systématique de la précision du gradient obtenu par une méthode basée sur le modèle adjoint. On établit les capacités d'identification d'une telle méthode pour le cas du coefficient de friction  $\beta$  au sein d'une loi de friction non-linéaire. Une comparaison avec la méthode dite "auto-adjointe", négligeant la dépendance de la viscosité à la vitesse, courante en glaciologie, amène à formuler une généralisation de cette approximation vers une méthode de l'adjoint incomplet, ajustable en précision et en temps de calcul.

### 6.1 Introduction

Comme précédemment remarqué, les principales observations de la cryosphère disponibles sont généralement obtenues par des moyens de télédétection et sont donc principalement des observations de surface. Par ailleurs les analyses de sensibilités précédemment menées (voir chapitres 4 et 5) ont montré que l'écoulement de la glace est fortement sensible à l'état du socle rocheux et donc à sa modélisation. Le glissement basal est par conséquent un paramètre de première importance dans un contexte de contrôle des écoulements géophysiques et en particulier glaciologiques.

Cet état de fait soulève des questionnements d'une part sur la capacité des données de surface à contenir des informations sur les conditions basales et d'autre part sur le potentiel de la modélisation inverse à représenter ces conditions.

Le premier questionnement a été traité par de nombreux auteurs à travers le problème de l'effet de la topographie du socle sur la surface. On trouve dans [7] une des premières études de la transmission en surface de fluctuations du glissement basal dans le cas d'un fluide newtonien à l'aide de méthodes de perturbations. Le caractère non local de la transmission des variations du coefficient de friction vers la surface est établi dans [140] dépendamment du facteur de glissement (ratio entre les vitesses surfaciques et basales). Ces questionnements sont systématisés et étendus dans [74] toujours sous l'hypothèse d'un fluide newtonien à l'aide de méthodes de perturbations. L'une des conclusions principales est que la transmission de la variabilité basale à la surface d'un glacier croît significativement avec l'augmentation du glissement.

On a vu au chapitre précédent à l'aide des analyses de sensibilité que les vitesses de surface intègrent une information fiable et riche sur l'état rhéologique du système. La question de la représentabilité du coefficient de friction à travers des observations de vitesses de surface (horizontales et verticales) à l'aide d'une méthode inverse est étudiée dans [75]. Ladite méthode, basée sur une approche bayésienne, est utilisée pour étudier les effets de la densité et de la qualité des données de vitesse de surface sur l'estimation du coefficient de friction dans le cas d'un fluide newtonien pour une loi de friction linéaire. Une limite de représentabilité de variations sur le coefficient de friction de longueurs d'onde de faibles amplitudes d'environ 50 fois l'épaisseur de glace est observée. Une méthode similaire pour le cas d'un fluide non newtonien et d'une friction non-linéaire est développée dans [142].

Par ailleurs, la méthode d'identification basée sur [115] et très largement utilisée depuis (*e.g.* [93, 104, 127]) fait l'hypothèse d'une viscosité indépendante de la vitesse et une attention limitée a été donnée à la qualité des estimations obtenues par cette méthode en termes de variabilité spatiale du coefficient de friction (voir [75]). Des comparaisons entre la méthode dite "auto-adjointe" et l'utilisation d'un adjoint exact sont réalisées dans [65] sur la base d'un modèle approché et intégré sur la verticale. Des limitations sur le processus de minimisation sont mises en avant lors de l'utilisation de la méthode "auto-adjointe". A notre connaissance, l'utilisation de l'adjoint exact dans le cadre du problème de Stokes non newtonien n'a été réalisée que dans [133]. Une comparaison aux résultats de [75] sur un problème académique leur permet de conclure à une représentabilité de longueurs d'onde dans le coefficient de friction de l'ordre de 20 fois l'épaisseur de glace dans le cas d'une loi de glissement linéaire.

Le présent chapitre a pour objet l'étude numérique des limitations de la méthode "auto-adjointe" comparativement à la méthode exacte. L'approximation "auto-

adjointe" est présentée comme un cas limite de la méthode de l'accumulation retour utilisée pour le calcul de l'adjoint par différentiation automatique. Des tests numériques sur la précision des gradients accessibles avec les deux méthodes sont réalisés, démontrant une limitation importante de la précision du gradient obtenu par la méthode "auto-adjointe". On étudie ensuite l'identifiabilité, pour une loi de glissement non linéaire (equation (4.14) avec  $m = 3$ ), d'un coefficient de friction présentant de hautes fréquences selon le niveau de bruit considéré sur les données synthétiques. La qualité des estimations obtenues par les deux méthodes est comparée dans le cas d'observations de vitesses de surface horizontales denses pour un écoulement pseudo uniforme puis pour un écoulement réaliste présentant une importante variabilité spatiale. Le cas de l'écoulement réaliste est enfin traité pour une densité de données réduites.

## 6.2 Adjoint exact, méthode de l'accumulation retour et approximation "auto-adjointe"

Le présent modèle adjoint a été obtenu par différentiation algorithmique (ou automatique) du code source. La différentiation automatique d'un problème présentant un calcul itératif de type point fixe de la forme  $y = \Phi(y, u)$  (tel que la résolution du problème de Stokes non linéaire par la méthode de Picard) est réalisée par accumulation retour (voir [71, 72]). La technique d'accumulation retour consiste en la construction d'un graphe algorithmique de l'évaluation de la fonction  $\Phi$  où les noeuds du graphe représentent chacune des valeurs prises par la fonction. À chaque noeud est associée une valeur adjointe contenant le gradient de la fonction par rapport au noeud.

Les valeurs adjointes sont alors calculées dans l'ordre inverse. La valeur finale du gradient est obtenue comme la somme des dérivées partielles de la fonction sur l'ensemble des noeuds du graphe. Ce résultat est une conséquence de la formule de la chaîne. Comme vu précédemment, ce processus requiert à priori le stockage d'autant d'états du système que d'itérations réalisées par le solveur direct pour atteindre l'état convergé.

Il est montré dans [33] que, dans le cas d'un calcul direct par une méthode de point fixe, la quantité adjointe satisfait également un problème de point fixe dont le taux de convergence est identique au taux de convergence de la méthode de point fixe directe. Étant donné que les constructions directe et adjointe ont le même taux de convergence, il est normal de retenir, à priori, l'ensemble des itérations réalisées par la résolution directe pour le calcul du gradient. En pratique, comme détaillé en section 6.2.2, le nombre d'itérations retour requises pour obtenir une précision sur l'état adjoint équivalente à celle de l'état direct peut être ajusté dépendamment de

la vitesse de convergence de la construction directe.

La méthode de l'approximation "auto-adjointe" en glaciologie est introduite pour la première fois par [115] appliquée aux systèmes d'équations de type *shallow-ice*. L'approximation consiste en la dérivation des équations adjointes sans prise en compte de la dépendance explicite de la viscosité  $\eta$  au champ de vitesse  $\mathbf{u}$ . Il est important de préciser que la dénomination "auto-adjointe" pour cette approximation n'a de sens que dans le cas newtonien ( $n = 1$ ) car la matrice de rigidité résultante est alors symétrique.

Dans le cas général, la procédure consiste à calculer un état d'équilibre mécanique à partir du problème non-linéaire complet et d'obtenir le gradient par simple transposition de l'état final obtenu. L'extension de cette méthode au problème de Stokes non newtonien se fait sans difficulté (voir [127]). La signification physique de cette méthode pour  $n \neq 1$  n'est pas claire.

La qualité de cette approximation (par rapport à l'adjoint exact) pour l'identification de paramètres est évaluée dans [65] pour les équations de type *shallow-ice* intégrée sur l'épaisseur mais n'a jamais été traitée dans le cadre du problème de Stokes.

En revanche, dans notre contexte de différentiation automatique, la signification de cette approximation se déduit simplement. En effet, l'application d'une telle méthode revient à ne retenir lors de l'accumulation retour que le gradient issu de la dernière évaluation de la fonction  $\Phi$  (voir annexe A sur la différentiation d'un système linéaire). La qualité d'une telle approximation est alors à priori discutable et dépendra fortement du problème considéré et de la précision requise sur le gradient.

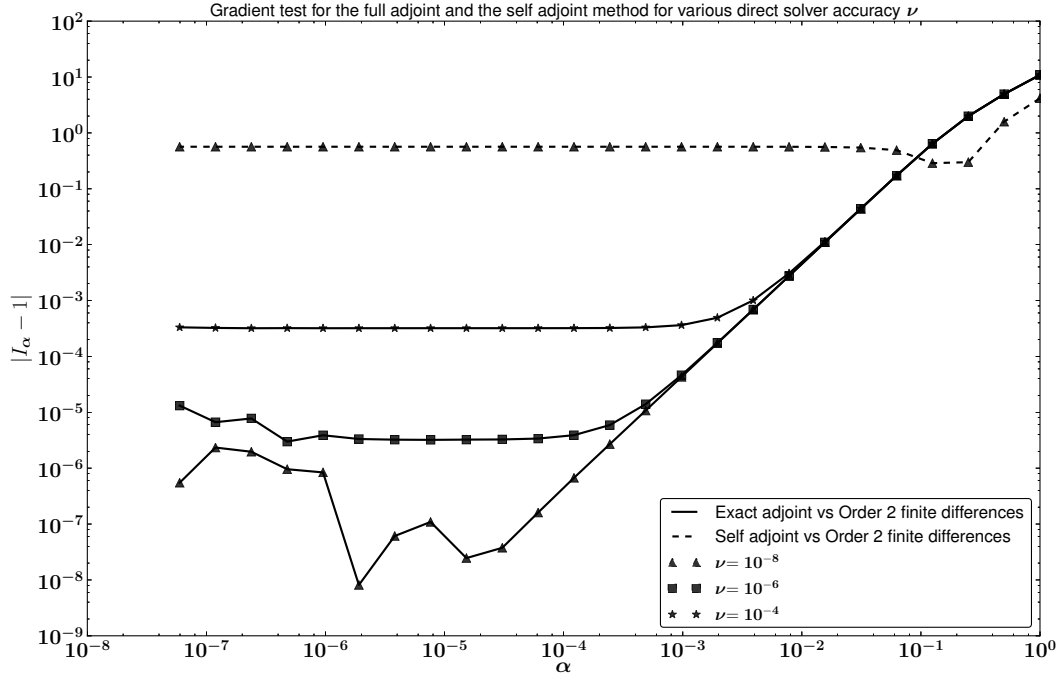
### 6.2.1 Précision de l'approximation "auto-adjointe"

On considère l'écoulement dans un canal à fond plat d'épaisseur constante, de rapport d'aspect 1/10 et présentant une pente de 10%. L'écoulement sur le bord entrant est décrit par l'expression analytique de type Poiseuille définie par (5.22). Une pression hydrostatique est imposée au niveau du bord sortant. L'écoulement résultant est donc un écoulement stationnaire, uniforme en  $x$ .

La fonction coût est définie par :

$$j(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} |u(\mathbf{k}, \bar{z}) - u^{obs}|^2 d\bar{x} \quad (6.1)$$

où les données  $u^{obs}$  sont les vitesses horizontales à la surface  $\Gamma_s$ ,  $(\bar{x}, \bar{z})$  désigne le repère de la pente moyenne et le vecteur de contrôle  $\mathbf{k}$  est restreint au coefficient de friction  $\beta$ .



**Figure 6.1:** Test du gradient pour la méthode de l'adjoint exact et la méthode "auto-adjointe" pour différents niveaux de précision de la résolution directe  $\nu$ . La quantité  $I_\alpha$  est définie par (3.26).

On représente sur la Figure 6.1 les tests du gradient (voir section 3.3.2.2 pour le détail de la procédure) réalisés pour la méthode "auto-adjointe" et l'adjoint exact pour la fonction coût (6.1). Les tests sont effectués pour différents niveaux de résolution du problème direct  $\nu = \|u_{k+1} - u_k\|/\|u_k\|$  afin de quantifier la précision maximale accessible au gradient en fonction de celle du problème direct. Cette précision est fournie explicitement au solveur direct à travers un seuil de convergence mais peut être vue comme un niveau de précision disponible sur les données  $u^{obs}$ ; des données présentant un bruit de 0.01% correspondent à une précision sur la résolution du problème direct de  $10^{-4}$ . Le test du gradient compare le gradient calculé par l'état adjoint avec un gradient de référence. Pour ces tests, le gradient de référence est obtenu par une approximation différence finie centrée (d'ordre 2) calculé pour une précision sur l'évaluation de la fonction de  $10^{-12}$ . La précision sur l'évaluation de la fonction pour le calcul du gradient par différences finies étant bien supérieure aux précisions considérées pour la résolution du problème direct, cette valeur de référence joue donc le rôle de valeur "exacte".

L'adjoint exact présente le comportement théorique attendu (voir section 3.3.2.2). On retrouve la pente de 2 (en représentation logarithmique) associée à la convergence de l'approximation différence finie (3.25). On constate ainsi sur la figure 6.1

que la précision de l'état adjoint est de l'ordre de celle du solveur direct.

A l'inverse, la précision du gradient obtenu dans le cadre de l'approximation "auto-adjointe" est plutôt limitée. La meilleure précision accessible est légèrement inférieure à 1 indépendamment de la précision du solveur direct (on ne trace donc sur la figure 6.1 qu'une seule courbe pour le test du gradient, dans le cas  $\nu = 10^{-8}$ ,  $\nu$  désignant la précision de la résolution directe).

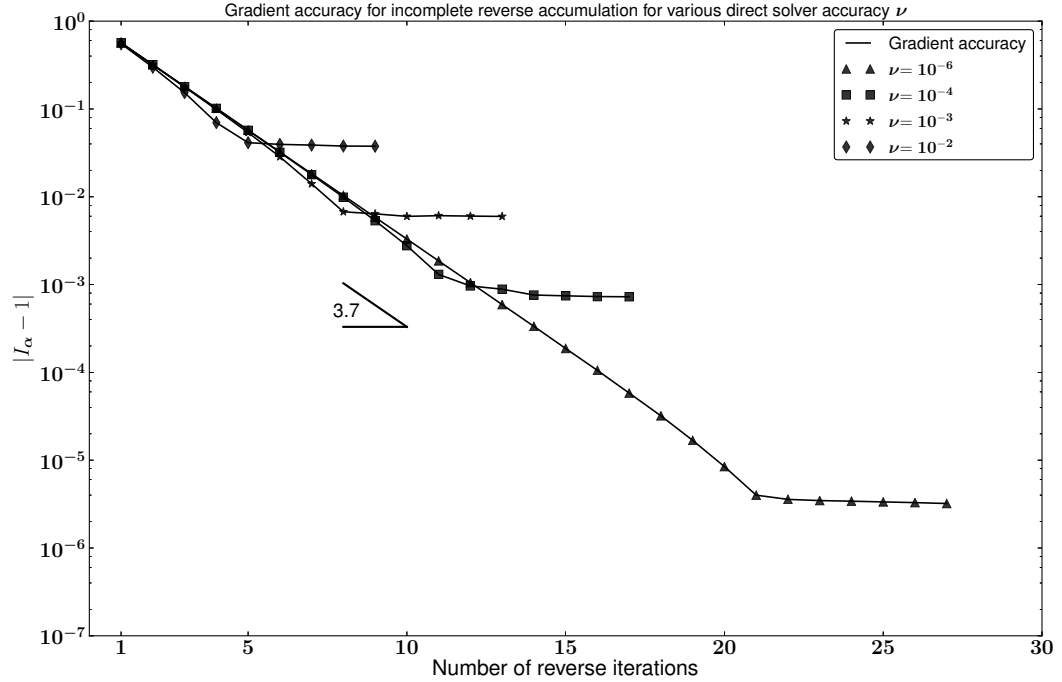
On déduit de ces résultats que l'approximation "auto-adjointe" utilisée dans un processus d'identification de paramètres pourrait ne pas être capable de retrouver les paramètres de l'écoulement avec une précision suffisante. Toutefois, comme nous allons le voir, les tests numériques montrent une certaine capacité pour cette approximation à reconstruire partiellement le coefficient de friction (pour un coût de calcul bien inférieur à celui du calcul de l'adjoint complet). Cependant des faiblesses significatives pour la reconstruction des hautes fréquences ainsi qu'au niveau de la reconstruction de la fréquence principale du signal, particulièrement dans des situations extrêmes de glissement (très faible ou très rapide) sont mises en avant.

### 6.2.2 Troncature de l'accumulation retour

On étudie dans cette section l'effet d'une troncature de l'accumulation retour. La figure 6.2 représente le résultat obtenu par le test du gradient pour le calcul d'un état adjoint tronqué. Pour cela, on effectue le test du gradient sur des états adjoints successivement amputés d'une itération supplémentaire. On obtient ainsi l'ensemble des niveaux de précision accessibles pour l'ensemble des états adjoints intermédiaires entre l'adjoint complet et l'approximation "auto-adjointe". Ce test est réalisé pour différentes valeurs de précision  $\nu$  du solveur direct. Le nombre d'itérations réalisées par le solveur direct pour atteindre la précision requise  $\nu$  est donc fonction de cette précision.

Tout d'abord, on retrouve bien les précisions obtenues lors du test du gradient présenté précédemment (voir figure 6.1). La plus mauvaise précision, identique pour tous les niveaux de résolution du problème direct et égale à 0.6, est obtenue pour l'approximation "auto-adjointe" (correspondant à 1 itération retour) et la précision maximale est bien atteinte avec la méthode de l'adjoint complet (correspondant au dernier point de chaque courbe).

On observe une décroissance linéaire de l'erreur (en échelle logarithmique) de pente approximative 3.7. Ce comportement de l'erreur est cohérent avec le résultat de [33] qui stipule que le calcul de l'état adjoint par accumulation retour revient à une méthode de point fixe. On a donc dans le cas présent un algorithme d'accumulation retour présentant une vitesse de convergence de pente 3.7. Or, la vitesse de convergence pour le calcul direct par la méthode du point fixe donne une pente



**Figure 6.2:** Précision du gradient obtenu pour une accumulation retour incomplète pour différents niveaux de précision de la résolution directe  $\nu$ .

de 3. On observe donc une vitesse de convergence de l'état adjoint supérieure à celle de l'état direct. Ce résultat explique l'effet de plateau observé; en effet, une convergence plus rapide de l'algorithme d'accumulation retour permet d'atteindre la solution convergée de l'état adjoint en moins d'itérations qu'il n'en a fallu au solveur direct.

On constate de nouveau que l'approximation "auto-adjointe" est fortement limitée en précision et qu'une méthode incomplète intermédiaire entre le calcul complet et la rétention d'une seule itération pourrait amener un gain de précision important; la décroissance linéaire de l'erreur (en échelle logarithmique) induit une précision significativement améliorée pour chaque itération supplémentaire retenue lors du calcul de l'état adjoint.

De plus, la convergence rapide de l'algorithme d'accumulation retour par rapport au solveur direct permet dans tous les cas "d'économiser" un certain nombre des dernières itérations dans le calcul de l'état adjoint sans perte de précision. Le nombre d'itérations superflues est a priori fortement dépendant de la situation considérée et doit-être étudié dans chaque cas.

Pour le présent cas test, on constate que les 5 dernières itérations lors de l'accumulation retour sont inutiles quel que soit le niveau de précision de la résolution



directe (ce qui correspond aux plateaux observés sur la figure 6.2). Ces 5 dernières itérations correspondent donc aux 5 premières itérations réalisées par le solveur direct. Ne pas accumuler ces itérations pour le calcul de l'adjoint revient à n'amorcer la procédure d'accumulation retour qu'à partir d'un résidu sur la résolution directe de 0.1 (*i.e.* une variation relative entre deux itérés vitesse successifs de 0.1). Cette observation, bien que dépendante du cas test, peut être vue comme une méthode empirique pour définir un critère sur le nombre d'itérations directes à accumuler pour obtenir la meilleure précision sur l'état adjoint. Dans le cas présent, cela revient à n'amorcer le stockage en mémoire des itérations réalisées par le solveur direct qu'une fois le résidu du solveur direct inférieur à 0.1.

### 6.3 Identifiabilité du coefficient de friction

Fort de ces observations sur la précision accessible par les méthodes de l'adjoint complet et "auto-adjointe", on s'intéresse dans cette section aux limites pratiques d'identifiabilité du coefficient de friction par les deux méthodes.

L'objectif global est de dégager des conclusions sur la possibilité de l'utilisation de la méthode "auto-adjointe" (amenant un gain en coût de calcul et en occupation mémoire important) et donc sur la qualité des résultats qu'elle fournisse dans la perspective d'identification réaliste du coefficient de friction. La qualité des résultats sera évaluée en termes de fréquences et d'amplitudes des coefficients de friction reconstruits par rapport au coefficient cible.

Comme nous l'avons vu, la précision du gradient calculé par la méthode "auto-adjointe" est bornée quel que soit le niveau de précision de la résolution directe. Ce niveau de précision sur le solveur direct peut être vu comme une précision *a priori* sur les données utilisées dans la fonction coût. Nous n'utilisons dans les présentes simulations que des jeux de données synthétiques. Un bruit gaussien de niveau  $\delta$  est alors ajouté *a posteriori* pour simuler des données réalistes. La précision du gradient calculé par la méthode exacte étant logiquement dépendante de la précision de la résolution directe, on va tout d'abord chercher à mettre en évidence quelle précision sur la résolution directe  $\nu$  (et donc de manière équivalente quel niveau de bruit sur les données  $\delta$ ) est nécessaire pour constater la limite de précision de la méthode "auto-adjointe".

On utilisera pour cela trois niveaux de bruit  $\delta$  de 0.01% et 0.1% et 1% représentant respectivement des bruits très faible, faible et réaliste. Dans toutes les situations, la simple observation du coût final réalisé par les deux méthodes ne permet pas de distinguer leur précision pour un bruit de 1% ou plus. En revanche, l'analyse fréquentielle nous permettra de constater qu'un coût final identique ne signifie pas une reconstruction identique du coefficient de friction (problème d'équifinalité sur

ce type de problème inverse mal posé).

On considérera dans un premier temps la situation idéalisée d'un écoulement quasi-uniforme dans un canal à fond plat pour le cas des bruits faible et très faible afin de mettre en évidence les limites numériques de la méthode "auto-adjointe".

On réalise ensuite des expériences dans le cadre d'un écoulement pseudo-réaliste spatialement variable pour un bruit réaliste et pour des situations de données de surface plus ou moins denses.

L'ensemble des identifications réalisées utilise comme valeur initiale ("*first-guess*") pour le coefficient de friction la valeur moyenne  $a$  du coefficient cible.

### 6.3.1 Écoulement quasi-uniforme

Les expériences suivantes sont réalisées sur un canal à fond plat d'épaisseur  $h = 1\text{m}$  et de longueur  $L = 10\text{m}$  présentant une pente de 10%. L'écoulement entrant est décrit par la solution analytique (5.22). Le bord sortant est soumis à une condition limite de pression hydrostatique. On considère une condition limite de friction non-linéaire définie par l'équation (4.14) pour un exposant  $m = 3$ . Le coefficient de friction cible variable en  $x$ , est donné par :

$$\beta_r^n(x) = a + \frac{a}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{20dx}\right) + \frac{a}{5} \sum_{i=1}^n f_i(x) \quad (6.2)$$

et

$$f_1(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{10dx}\right) \quad (6.3)$$

$$f_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{4dx}\right) \quad (6.4)$$

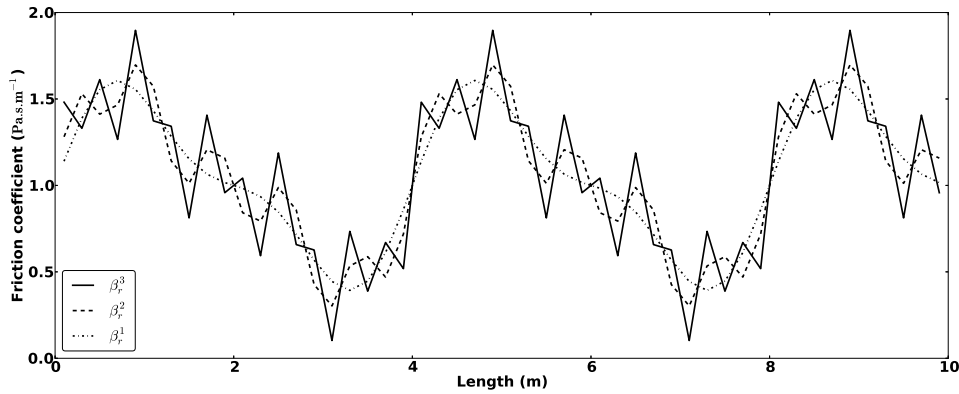
$$f_3(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{2dx}\right) \quad (6.5)$$

où  $a$  représente la valeur moyenne de la friction en  $\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ . Par extension, on pose :

$$\mathbf{f}_0(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{20dx}\right) \quad (6.6)$$

où  $dx = 0.2\text{m}$  désigne la longueur d'une arête basale ou autrement dit la finesse de la discrétisation du socle.

On pose  $\beta_r = \beta_r^3$ , le coefficient de friction somme des 4 niveaux de fréquence correspondant à des longueurs d'onde de 20, 10, 5 et 2 longueurs d'arête  $dx$ . La basse fréquence  $f_0$  représente une onde porteuse pour les 3 plus hautes fréquences  $f_i, 1 \leq i \leq 3$ . En termes d'épaisseur du domaine  $h$ , les fréquences  $f_i, 0 \leq i \leq 3$  correspondent donc à des longueurs d'onde de  $4h, 2h, 0.8h$  et  $0.4h$  respectivement. Les coefficients  $\beta_r^n, 1 \leq n \leq 3$  sont représentés en Figure 6.3 pour le cas  $a = 1$ . Ces informations sont résumées dans le tableau 6.1.



**Figure 6.3:** Coefficient de friction  $\beta_r^n, 1 \leq n \leq 3$  donné par (6.2) pour  $a = 1$ .

	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
Longueurs d'onde en $h = 1\text{m}$	$4h$	$2h$	$0.8h$	$0.4h$
Longueurs d'onde en $dx = 0.2\text{m}$	$20dx$	$10dx$	$4dx$	$2dx$
Fréquences relative à la longueur du domaine $L = 10\text{m}$	2.5Hz	5Hz	12.5Hz	25Hz

**Table 6.1:** Caractéristiques du signal  $\beta$  donné par (6.2).

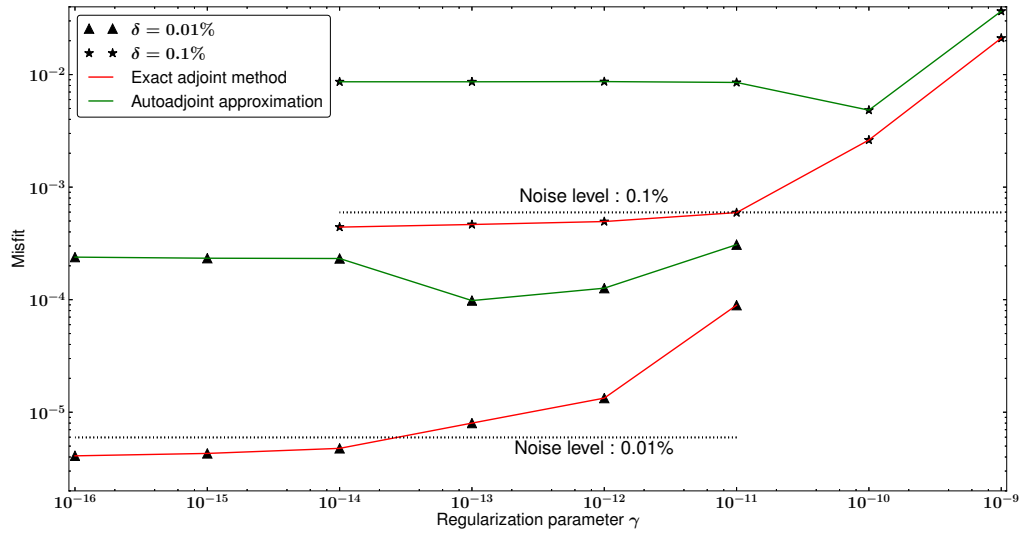
L'écoulement est uniforme dans le cas d'une friction constante sur la longueur. On peut le qualifier de pseudo-uniforme dans le cas du coefficient de friction donné par (6.2).

On cherche à déterminer le niveau de variabilité spatiale du coefficient de friction représentable par le processus d'identification à partir de données de vitesses de surface pour les méthodes de l'adjoint complet et de l'approximation "auto-adjointe" en fonction de l'intensité de la friction. L'intensité de la friction dépend de la valeur du paramètre  $a$  et sera décrite par la suite en termes de facteur de glissement  $r$ . Le facteur de glissement est une grandeur adimensionnelle quantifiant le rôle relatif dans le mouvement fluide des effets dus au glissement de ceux dus à la déformation pure. On le calcule ici comme le quotient de la vitesse moyenne de glissement basal  $\overline{u_b}$  et de la différence entre la vitesse basale moyenne  $\overline{u_b}$  et la vitesse moyenne à la surface  $\overline{u_s}$  soit (cf. [81]) :

$$r = \overline{u_b} / |\overline{u_s} - \overline{u_b}| \quad (6.7)$$

. Un facteur  $r = 1$  désigne donc une situation où les vitesses à la surface sont pour moitié dues au glissement et pour moitié à la déformation.

On considère 6 facteurs de glissements différents allant d'une friction très forte à un glissement très rapide. Les facteurs de glissement  $r = 0.005$ ,  $r = 0.05$  et  $r = 0.5$  entrent dans la catégorie des glissements modérés et les facteurs de glissement  $r = 5$ ,



**Figure 6.4:** Application du principe de discrépance de Morozov. Discr pance finale (*misfit*)  $j_1 = \int_{\Gamma_s} |u_s(n) - u_s^{obs}(n_t)|^2 d\mathbf{x}$  en fonction de la valeur du paramètre de régularisation  $\gamma$ . La droite représentant le niveau de bruit correspond à la discrépance optimale obtenue en utilisant le coefficient de friction cible.

$r = 50$  et  $r = 500$  dans celle des glissements rapides.

Afin de mettre en évidence les limites de l'approximation "auto-adjointe", les identifications suivantes de  $\beta$  sont réalisées pour des niveaux de bruit sur les données de vitesses à la surface  $\delta = 0.1\%$  et  $\delta = 0.01\%$ . Précisons que la méthode "auto-adjointe" fournit un résultat très proche de celle de l'adjoint complet en termes de coût pour  $\delta = 1\%$  (non représentée sur la figure 6.4) et que la distinction entre les deux méthodes apparaît clairement pour les niveaux de bruits plus faibles.

La fonction coût utilisée est définie par :

$$j(\beta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} |u_s(n) - u_s^{obs}(n_t)|^2 d\mathbf{x} + \gamma \int_{[0,L]} \nabla \beta \cdot \nabla \beta d\mathbf{x} \quad (6.8)$$

Le choix de la valeur du paramètre de régularisation  $\gamma$  est opéré selon le principe de discrépance de Morozov (voir section 3.2.3). On représente sur la Figure 6.4 l'application de cette méthode pour les identifications réalisées avec les deux méthodes (adjoint complet et approximation "auto-adjointe") dans le cas d'une friction intermédiaire ( $r = 0.5$ ). Les courbes correspondantes pour des facteurs de glissement plus forts sont identiques et ne sont donc pas représentées.

La Figure 6.4 démontre bien l'incapacité de la méthode "auto-adjointe"   fournir un gradient suffisamment précis pour un niveau de bruit suffisamment faible. En effet,

le gradient calculé par cette méthode ne permet pas d'atteindre la discrédance optimale correspondant aux niveaux de bruit sur les données  $\delta = 0.1\%$  et  $\delta = 0.01\%$ . Dans ce cas, l'approximation "auto-adjointe" n'est donc à priori pas valide. Cette observation est indépendante de l'intensité de la friction considérée.

Afin d'étudier les effets de l'approximation sur le calcul du gradient, on compare dans la suite les coefficients de friction identifiés par les deux méthodes dans les cas de très faible bruit  $\delta = 0.01\%$  et de faible bruit  $\delta = 0.1\%$ .

Les meilleurs coefficients de friction identifiés (au sens de Morozov) sont notés  $\beta_f$  (pour *full-adjoint*) et  $\beta_s$  (pour *self-adjoint*) correspondant au résultat obtenu par la méthode de l'adjoint complet et de l'approximation "auto-adjointe" respectivement. On désigne alors par  $\hat{\beta}_f$  et  $\hat{\beta}_s$  les Transformées de Fourier Discrètes associées (TFD). On note  $\hat{\beta}_r$  la TFD associée au coefficient de friction cible (6.2). On trace sur la figure 6.5 les TFD  $\hat{\beta}_r$ ,  $\hat{\beta}_f$  et  $\hat{\beta}_s$  obtenues pour les trois niveaux de friction forte et sur la figure 6.6 celles obtenues pour les trois niveaux de friction modérée.

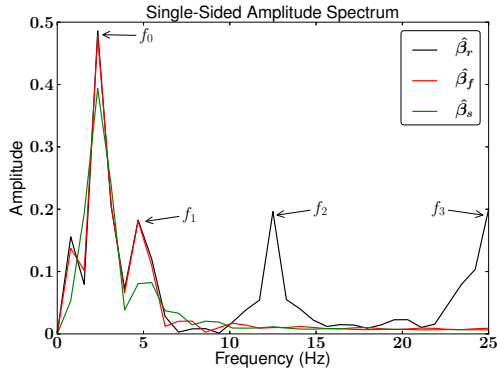
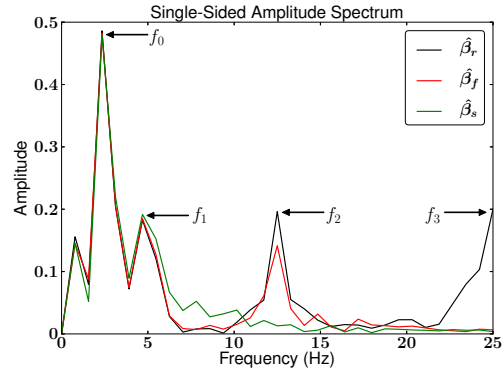
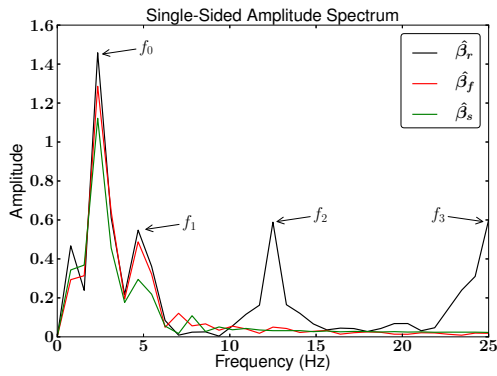
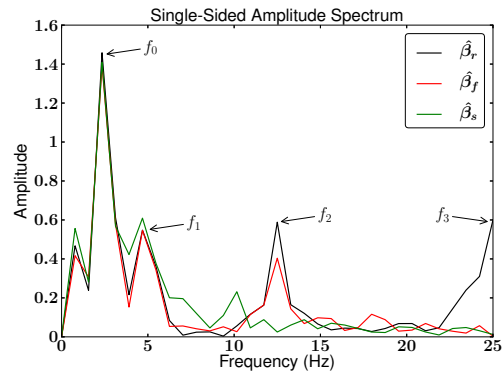
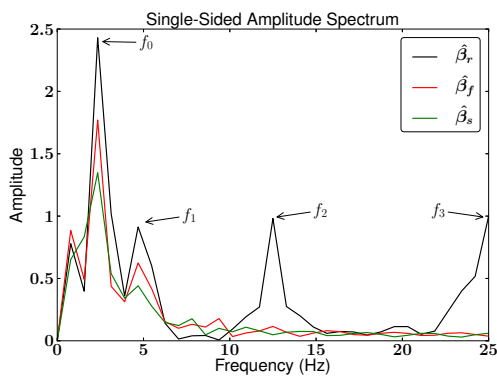
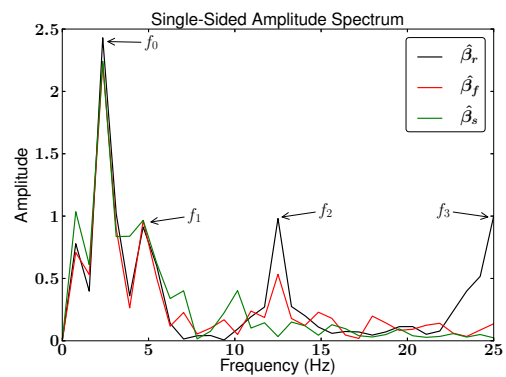
**Glissement modéré** On observe tout d'abord que les fréquences  $f_0$  et  $f_1$  (cf. tableau 6.1) sont globalement bien représentées par les deux méthodes quel que soit le facteur de glissement considéré dans le cas d'un très faible bruit ( $\delta = 0.01\%$ ). La fréquence de la porteuse  $f_0$  notamment, est très bien représentée par les deux méthodes ce qui semble souhaitable. La méthode de l'adjoint complet montre une plus grande robustesse sur l'identification de ces deux fréquences par rapport au facteur de glissement tandis que l'on constate une dégradation notable dans l'identification de la fréquence  $f_1$  par la méthode incomplète lorsque le facteur de glissement diminue.

En revanche, la fréquence  $f_2$  semble relativement bien captée lors de l'identification par l'adjoint complet tandis qu'elle n'apparaît pas dans le spectre issu de la méthode "auto-adjointe". On constate cependant une difficulté croissante pour l'identification de cette variation avec la diminution du facteur de glissement.

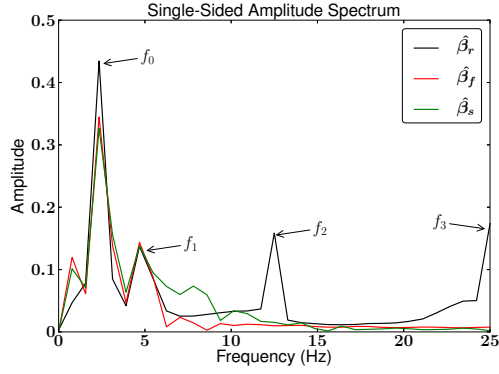
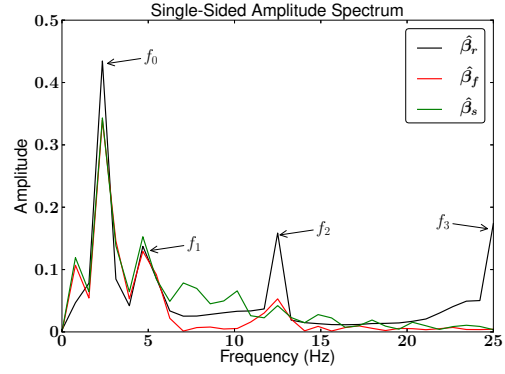
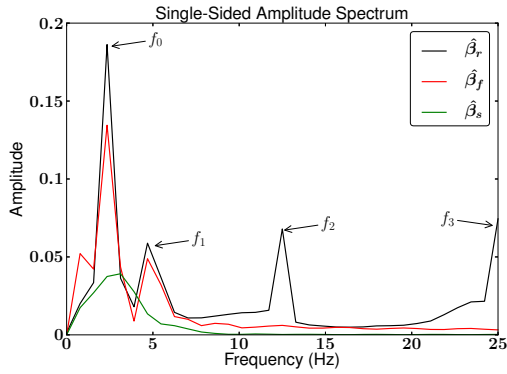
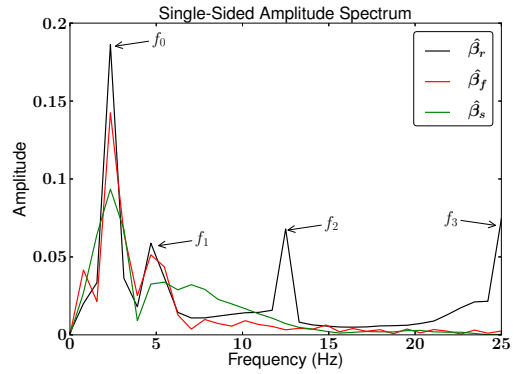
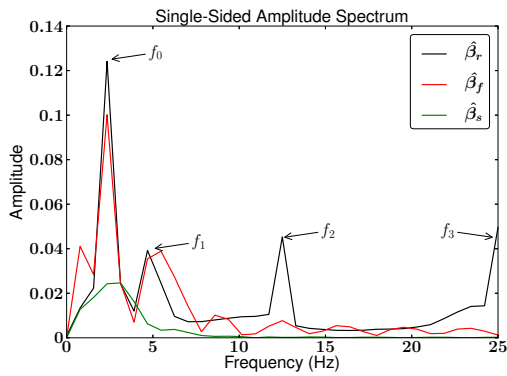
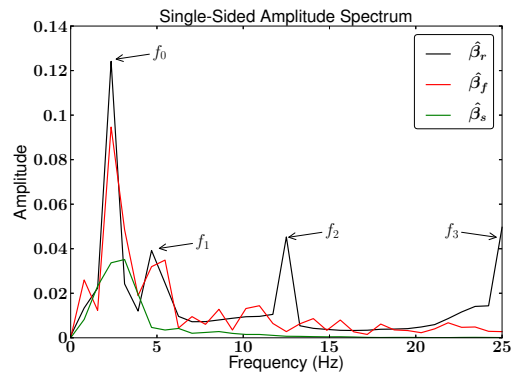
Enfin, la plus haute fréquence  $f_3$  n'apparaît dans aucun des spectres de  $\beta_f$  et  $\beta_s$  quelle que soit l'intensité de la friction.

Dans le cas d'un bruit faible ( $\delta = 0.1\%$ ), on voit que l'on perd la capacité à retrouver la fréquence  $f_2$  par la méthode exacte. L'identification de la fréquence  $f_1$  est obtenue avec précision dans le cas du facteur de glissement  $r_1$  mais on constate une dégradation du résultat avec la diminution du facteur de glissement au niveau de  $f_1$ . La méthode "auto-adjointe" ne capte pratiquement pas cette fréquence quelle que soit l'intensité de la friction.

Concernant la fréquence porteuse, on constate une difficulté pour la méthode "auto-adjointe" à l'identifier avec grande précision y compris pour le cas de plus grand facteur de glissement. La fréquence est bien identifiée par la méthode "auto-


 (a) Facteur de glissement  $r_1 = 0.5$ ,  $\delta = 0.1\%$ 

 (b) Facteur de glissement  $r_1 = 0.5$ ,  $\delta = 0.01\%$ 

 (c) Facteur de glissement  $r_2 = 0.05$ ,  $\delta = 0.1\%$ 

 (d) Facteur de glissement  $r_2 = 0.05$ ,  $\delta = 0.01\%$ 

 (e) Facteur de glissement  $r_3 = 0.005$ ,  $\delta = 0.1\%$ 

 (f) Facteur de glissement  $r_3 = 0.005$ ,  $\delta = 0.01\%$ 

**Figure 6.5:** Transformée de Fourier discrète des coefficients de friction identifiés  $\hat{\beta}_f$  et  $\hat{\beta}_s$  et du coefficient de friction cible  $\hat{\beta}_r$ . Friction forte.


 (a) Facteur de glissement  $r_1 = 5$ ,  $\delta = 0.1\%$ 

 (b) Facteur de glissement  $r_1 = 5$ ,  $\delta = 0.01\%$ 

 (c) Facteur de glissement  $r_2 = 50$ ,  $\delta = 0.1\%$ 

 (d) Facteur de glissement  $r_2 = 50$ ,  $\delta = 0.01\%$ 

 (e) Facteur de glissement  $r_3 = 500$ ,  $\delta = 0.1\%$ 

 (f) Facteur de glissement  $r_3 = 500$ ,  $\delta = 0.01\%$ 

**Figure 6.6:** Transformée de Fourier discrète des coefficients de friction identifiés  $\hat{\beta}_f$  et  $\hat{\beta}_s$  et du coefficient de friction cible  $\hat{\beta}_r$ . Friction faible.

adjointe" mais l'amplitude n'est retrouvée qu'à hauteur de 80% de l'amplitude cible pour le facteur de glissement  $r_1 = 0.5$ . La diminution du facteur de glissement dégrade pour les deux méthodes l'identification de  $f_0$ . Dans le cas d'un facteur de glissement  $r_3 = 0.005$ , on retrouve 70% de l'amplitude attendue par la méthode exacte et 50% dans le cas de l'approximation "auto-adjointe".

**Glissement rapide** On constate de nouveau une représentation relativement bonne des fréquences  $f_0$  et  $f_1$  pour la méthode exacte quel que soit le niveau de bruit. La représentation de la porteuse est tout de même amoindrie (environ 80% de l'amplitude cible) par rapport au cas d'un glissement plus modéré  $r = 0.5$  mais stable avec l'augmentation de  $r$ . De même la fréquence  $f_1$  est assez finement représentée par la méthode exacte pour l'ensemble des situations malgré une relative dégradation avec l'augmentation de  $r$ . En revanche, la fréquence  $f_2$  n'apparaît dans aucun spectre quelle que soit la situation et la méthode, contrairement aux cas de glissements plus modérés. De nouveau la fréquence  $f_3$  n'est captée par aucune méthode. Un bruit faible mais notable apparaît pour le cas  $r = 500$  pour la méthode exacte, particulièrement pour le très faible  $\delta$ .

La méthode "auto-adjointe" présente une reconstruction d'assez bonne qualité dans le cas  $r = 5$  pour les deux plus basses fréquences bien que l'on constate l'apparition de bruit entre les fréquences  $f_1$  et  $f_2$ . On constate cependant une dégradation très forte du résultat avec l'augmentation de  $r$ ; pour un bruit de 0.1% l'identification par la méthode "auto-adjointe" n'amène pratiquement aucun signal au niveau de la porteuse et à fortiori pour les plus hautes fréquences.

**Bilan** On tire de ces observations les conclusions suivantes. Tout d'abord, l'intensité de la friction à identifier joue un rôle important dans la limite d'identifiabilité du coefficient de friction en termes de fréquence; un facteur de glissement faible induit une sensibilité réduite de l'écoulement à la friction et donc un filtrage plus important des informations transmises entre le socle et la surface. Ce résultat est tout à fait cohérent avec ceux obtenus au chapitre 4 où l'on observe une propagation de la sensibilité à la rhéologie sur l'épaisseur lorsque le profil de vitesse verticale de l'écoulement s'approche de celui d'un écoulement *plug* (voir section 5.7). De même ici, une forte friction induit un profil de vitesse vertical plutôt convexe avec une concentration des gradients de vitesses (cisaillement) à proximité du fond et donc une moins bonne transmission de l'information entre le fond et la surface.

A l'instar des fortes frictions, les très faibles frictions réduisent aussi la qualité de la reconstruction car un glissement très rapide induit également une décroissance de la sensibilité de l'écoulement à ce paramètre mais pour des raisons différentes. Intuitivement, on comprend que le cas d'une friction très faible va rendre les effets de la topographie locale moindres et que la résistance du socle à l'écoulement inter-



viendra à travers une topographie moyenne équivalente à plus grande échelle. Cette caractéristique se retrouve dans la solution analytique pour l'écoulement uniforme (5.22) : pour que l'expression ait un sens lorsque  $\beta$  tend vers 0, il faut que la pente  $\theta$  tende également vers 0. Ce phénomène s'observe physiquement : en présence d'un lac sous-glaciaire de grande dimension on retrouve une signature de ce lac en surface sous la forme d'une topographie de surface très plane à la verticale du lac. On retrouve cette interprétation dans les sensibilités normalisées représentées sur la figure 6.9.

Ces deux observations permettent de déduire l'existence d'un maximum d'identifiabilité numérique du coefficient de friction par la méthode de l'adjoint ; la situation la plus favorable à une identification de qualité correspond donc à la zone où la pondération entre les effets de glissement et les effets de la déformation sur les vitesses de surface est relativement équilibrée (typiquement  $0.5 < r < 5$ ). La faible précision du gradient obtenu par la méthode "auto-adjointe" apparaît comme une limitation forte dans le cas de glissement rapide ( $r > 5$ ).

Pour le présent écoulement pseudo-uniforme, pour un niveau de bruit  $\delta = 0.1\%$ , on peut conclure que la limite de fréquence identifiable par la méthode exacte pour toute intensité de friction correspond à des longueurs d'onde de l'ordre de  $2h$ ,  $h$  l'épaisseur de l'écoulement. Une précision supérieure dans les données peut permettre de capter de plus hautes fréquences dans le cas de glissements modérés ( $r \geq 0.5$ ).

Pour la méthode "auto-adjointe", pour un facteur de glissement  $r \leq 5$ , la longueur d'onde  $4h$  est correctement représentée et la longueur d'onde  $2h$  est accessible dans les cas  $r = 0.5$  et  $r = 5$ . Pour un facteur de glissement  $r > 5$ , les fréquences considérées pour ces expériences ne sont pas adaptées.

Par ailleurs, on remarque une tendance de la méthode incomplète à introduire des fréquences parasites et non physiques dans le coefficient identifié dans le cas du bruit très faible. Ce phénomène non souhaitable s'accroît quand le facteur de glissement prend des valeurs extrêmes. Au delà du caractère approximatif, on en déduit donc un manque de robustesse de la méthode "auto-adjointe" pour de très faibles bruits ce qui semble cohérent au regard de la faible précision du gradient calculé par cette méthode. À l'inverse, la méthode de l'adjoint complet fournit une identification moins précise lorsque le facteur de glissement s'éloigne de l'unité mais n'introduit pas ou peu d'effet non physique dans le résultat.

Il est à noter que l'incapacité à retrouver la fréquence  $f_3$  n'est pas une limite numérique de résolution. Pour un bruit sur les données suffisamment faible, elle est également identifiable avec la méthode exacte.

On réalise des expériences similaires dans la section suivante pour le cas d'un écoulement pseudo-réaliste sur le profil vertical du glacier Mertz (voir section 4.8.3)

	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
Longueurs d'onde en $h = 1\text{km}$	$5h$	$2h$	$h$	$0.5h$
Longueurs d'onde en $dx = 100\text{m}$	$50dx$	$20dx$	$10dx$	$5dx$
Fréquences relative à la longueur du domaine $L = 33.3\text{km}$	6.6Hz	16.6Hz	33.3Hz	66.6Hz

**Table 6.2:** Caractéristiques du signal  $\beta$  donné par (6.9).

pour des données de vitesse de surface plus ou moins denses présentant un bruit de 1%.

### 6.3.2 Écoulement sur topographie réelle du glacier Mertz

L'écoulement considéré est identique à celui présenté en 4.8.3. Les données synthétiques sont obtenues pour le coefficient de friction suivant :

$$\beta_r^n(x) = a + \frac{a}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{50dx}\right) + \frac{a}{5} \sum_{i=1}^n f_i(x) \quad (6.9)$$

et

$$f_1(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{20dx}\right) \quad (6.10)$$

$$f_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{10dx}\right) \quad (6.11)$$

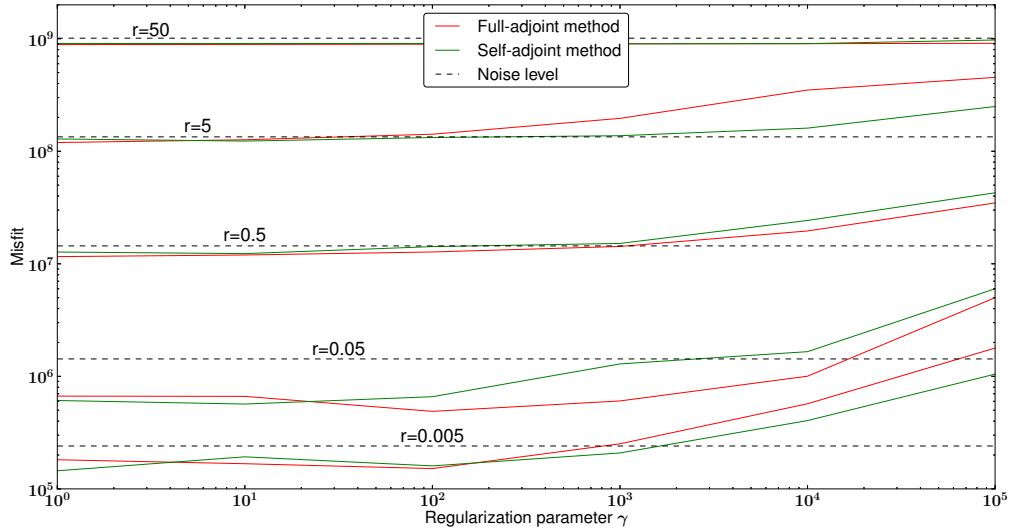
$$f_3(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{5dx}\right) \quad (6.12)$$

avec  $a$  la valeur moyenne de la friction,  $dx = 100\text{m}$  la longueur d'une arête du maillage au fond et par extension on pose :

$$f_0(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{50dx}\right) \quad (6.13)$$

Le cadre d'un écoulement non-uniforme sur une topographie complexe permet de mener la comparaison des deux méthodes dans un contexte de simulation réaliste. Nous pourrions ainsi tirer des conclusions pratiques sur la validité d'utilisation d'une méthode approximative. La fréquence  $f_0$  de la porteuse est de  $50dx$  ce qui correspond à une longueur d'onde d'environ  $5h$ ,  $h \sim 1\text{km}$  l'épaisseur moyenne du domaine. Les fréquences  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  correspondent donc à des longueurs d'onde d'environ  $2h$ ,  $h$  et  $h/2$  respectivement ce qui nous place dans une situation similaire au cas test en canal (cf. tableau 6.2).

Dans la présente situation d'un écoulement non uniforme à topographie complexe, la simulation d'un facteur de glissement moyen  $r = 500$  n'est pas réalisable. Étant donnée la grande variabilité spatiale, on ne peut réaliser, en moyenne, un tel



**Figure 6.7:** Application du principe de discrédance de Morozov pour des facteurs de glissement  $r = 0.005$ ,  $r = 0.05$ ,  $r = 0.5$ ,  $r = 5$  et  $r = 50$  sur l'écoulement réaliste. Les valeurs absolues des discrédances correspondent aux valeurs réelles rencontrées lors des simulations. Les valeurs du paramètre  $\gamma$  ont été ramenées entre 1 et  $10^5$  pour la lisibilité du graphique.

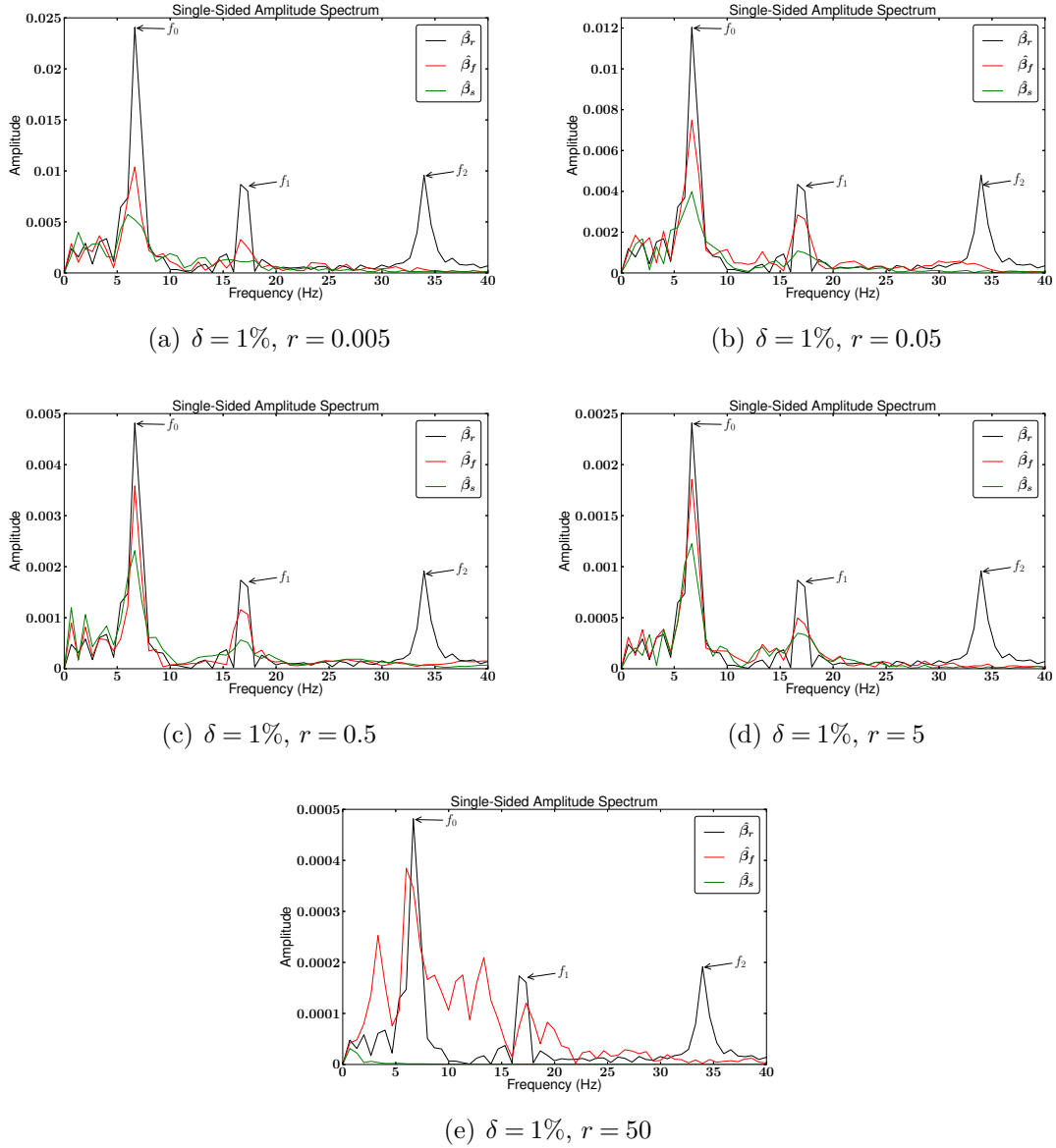
ratio de glissement sur l'ensemble de l'écoulement. Dans les identifications suivantes, on considère donc 5 facteurs de glissement s'échelonnant de  $r = 0.005$  à  $r = 50$ .

L'application du principe de Morozov pour ces 5 situations est représentée en Figure 6.7.

Le comportement observé est similaire à celui signalé (mais non représenté) pour la situation académique précédemment traitée. Les deux méthodes se comportent de manière identique en terme de décroissance du coût pour un bruit de 1% sur les données de surface. Elles s'avèrent capables d'un comportement robuste fournissant pour l'ensemble des situations une discrédance optimale au sens de Morozov. Le phénomène de surajustement du coût (*i.e.* l'obtention d'une discrédance inférieure à celle obtenue pour le coefficient de friction cible après perturbation des données) déjà observé auparavant (pour le cas de la méthode exacte) montre que la précision du gradient obtenu par les deux méthodes est à priori adaptée au niveau de bruit considéré. Le comportement particulier de la situation  $r = 50$  où la discrédance obtenue est inférieure à la discrédance optimale quelle que soit la valeur du paramètre de régularisation est expliqué plus loin.

La figure 6.8 représente les TFD des coefficients de friction identifiés par les deux méthodes et du coefficient cible (6.2) pour un bruit de 1% sur les données et pour les 5 valeurs du facteur de glissement  $r$ .

Bien que les longueurs d'ondes présentes dans le coefficient de friction soient similaires (en termes de ratio par rapport à l'épaisseur  $h$ ) au cas du canal quasi-uniforme,



**Figure 6.8:** Transformée de Fourier discrète des coefficients de friction identifiés  $\beta_f$  et  $\beta_s$  et du coefficient de friction cible  $\beta_r$ . La fréquence  $f_3$  n'étant captée par aucune des méthodes, elle n'est pas représentée sur les courbes. On considère un bruit  $\delta = 1\%$  dans toutes les situations.

l'utilisation d'un bruit plus élevé sur un écoulement non-uniforme a dégradé la reconstruction à tous les niveaux. L'amplitude de la porteuse  $f_0$  (de longueur d'onde  $5h$ ,  $h$  l'épaisseur) n'est retrouvée en totalité par aucune des méthodes mais apparaît tout de même distinctement pour  $r \leq 5$ . De même, la fréquence  $f_1$  (de longueur d'onde  $2h$ ), très bien captée dans les simulations précédentes par la méthode exacte, n'est raisonnablement reconstruite que dans les cas  $0.05 \leq r \leq 5$ . De nouveau, la méthode "auto-adjointe" ne la révèle pas ou peu. On remarque également que l'apparition de bruit dans le signal reconstruit par la méthode "auto-adjointe" n'est plus constatable pour ce niveau de bruit sur les données de surface ce qui semble cohérent avec la précision limitée du gradient calculé par cette méthode ; pour un niveau de bruit  $\delta$  suffisant, la précision du gradient est cohérente et n'introduit plus de fréquences parasites.

On peut conclure que les fréquences considérées pour ces simulations sont trop élevées pour être retrouvées dans ce contexte d'écoulement non uniforme avec bruit réaliste. Les expériences numériques montrent qu'une reconstruction de qualité peut être obtenue, pour la méthode exacte, pour une onde porteuse de longueur d'onde  $10h$  et une perturbation de longueur d'onde  $5h$  ; les longueurs d'onde inférieures ne sont pas accessibles.

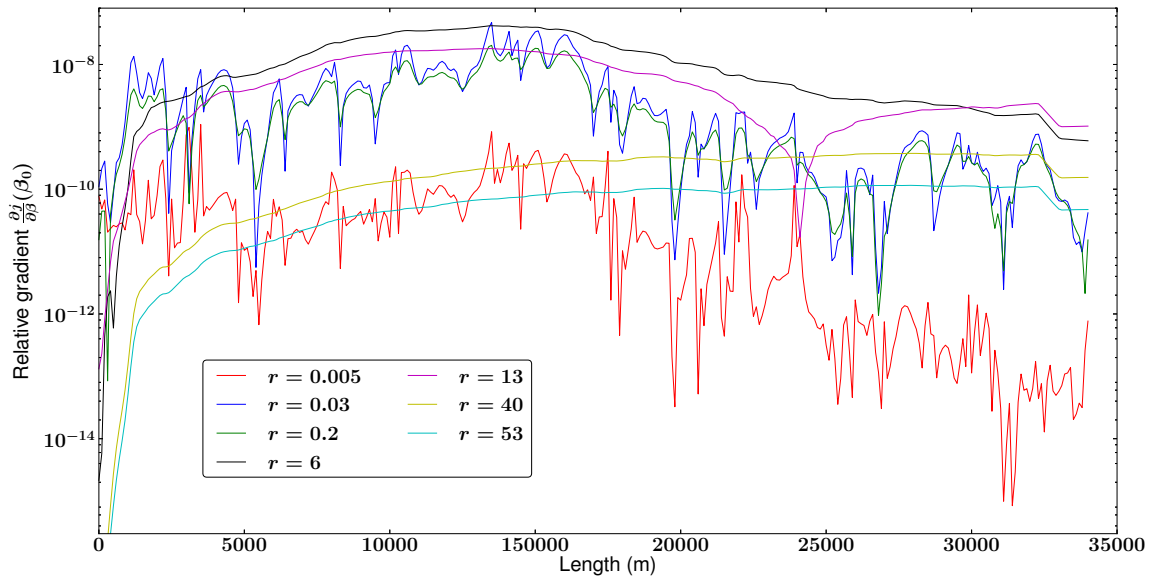
La deuxième observation est que la méthode exacte apporte, pour toutes les situations de glissement, une reconstruction améliorée et plus fidèle aussi bien pour la fréquence principale que pour la première perturbation.

Le cas du glissement très rapide ( $r = 50$ ) montre un comportement très différent de toutes les autres situations. La méthode exacte retrouve péniblement l'onde porteuse et présente un bruit très important autour de cette fréquence (notamment une basse fréquence d'amplitude élevée) et la méthode "auto-adjointe" ne retrouve, pour ainsi dire, aucune information du signal cible au-delà de la valeur moyenne initialement fournie.

Pour comprendre ce phénomène, on trace sur la figure 6.9 les gradients  $\partial j / \partial \beta(\beta_0)$  avec  $\beta$  défini par (6.9) pour différentes valeurs moyenne  $a$  de  $\beta$  décrites en terme de facteur de glissement  $r$ . Les gradients sont calculés autour d'une valeur  $\beta_0$  égale à  $a$ .

L'effet de l'augmentation du facteur de glissement est très net. Pour des facteurs de glissement  $r < 1$ , on voit que les effets locaux des hautes fréquences contenues dans  $\beta$  apparaissent nettement donnant un gradient très variable autour d'un comportement moyen. On retrouve le fait que la sensibilité moyenne décroît avec  $r$  du fait d'une moins bonne transmission de l'information du fond vers la surface. Pour les  $r < 1$  c'est donc la précision sur les données qui limite la capacité à identifier pleinement l'ensemble des fréquences contenues dans  $\beta$ .

En revanche, les gradients pour les cas  $r > 1$  sont très différents car beaucoup plus lisses. Les cas  $r = 6$  et  $r = 13$  qui représentent des facteurs de glissement en-



**Figure 6.9:** Sensibilité relative au coefficient de friction en fonction de l’abscisse  $x$  pour différents facteurs de glissement calculées autour de la valeur moyenne  $a$ .

core modérés contiennent une certaine variabilité du gradient local mais leur allure régulière présente une corrélation forte avec la topographie et les hautes fréquences introduites dans  $\beta$  semblent déjà pratiquement effacées du gradient. Dans cette situation, il semble que l’élément principal opposant une résistance à l’écoulement n’est plus tant la friction que la topographie “grande échelle” ou topographie équivalente.

Pour des  $r$  plus grands, l’effet de topographie semble également s’effacer et le gradient se contente de croître du bord entrant vers le bord sortant et atteint sa valeur maximale à proximité du bord sortant. Dans le cas présent, on peut en déduire que le seul élément effectif qui s’oppose à l’écoulement est la pression hydrostatique appliquée sur le bord sortant. Dans le cas d’une simulation tridimensionnelle, on retrouverait l’effet de reprise des contraintes par les cisaillements latéraux (cf. section 2.5.1).

On constate par ailleurs une diminution globale de la sensibilité avec l’augmentation de  $r$  ce qui confirme l’existence d’un maximum de sensibilité pour des  $r$  intermédiaires. Pour  $r > 1$  ce n’est pas la précision sur les données qui limite la capacité d’identification mais le comportement non-local de l’écoulement. Quand la friction devient très faible, elle ne représente plus qu’une petite fraction de la résistance à l’écoulement. Un exemple extrême est l’avancée d’une plateforme de glace sur l’eau dont la résistance que la friction oppose par frottement est pratiquement nulle. Dans le cas d’un écoulement tridimensionnel, le processus principal qui s’oppose à l’écoulement serait le cisaillement de la glace sur les frontières latérales. Dans notre situation bidimensionnelle, ces effets là n’existent pas et la résistance à l’écoulement se réduit à la variation de la topographie et à la condition limite de pression hydrostatique. Ces effets sont clairement non locaux ; le contrôle de la friction dans

ces situations ne peut être opéré que de manière *globale* et il y'a donc une limite dans les fréquences identifiables indépendamment de la précision sur les données.

Ce phénomène implique une *équifinalité* forte pour des frictions en-deçà d'une certaine valeur. On retrouve ce comportement sur la courbe de Morozov (voir figure 6.7) pour le cas  $r = 50$ . En effet, les discrécances obtenues par les deux méthodes sont inférieures à la discrécance optimale théorique même pour des régularisations très fortes ( $\gamma$  grand) amenant des  $\beta$  pratiquement constants autour de la valeur moyenne. Le coût initial lui-même, calculé pour  $\beta$  constant égal à la valeur moyenne, n'est que faiblement supérieur au coût optimal théorique.

Le problème d'optimisation associé est mal posé et la régularisation de Tykhonov sur le gradient de  $\beta$  ne permet pas de pallier ce problème.

Dans le cas  $r = 50$  présenté ici, pour des régularisations faibles (car la méthode de Morozov ne permet pas de sélectionner la bonne valeur pour  $\gamma$ ), on constate tout de même que la méthode exacte retrouve une petite quantité d'information couplée à un bruit important (problème d'optimisation clairement mal posé). La méthode "auto-adjointe" en revanche, quelle que soit la valeur de  $\gamma$ , ne s'éloigne pratiquement pas de la valeur initiale (égale à la valeur moyenne) lors du processus d'optimisation.

## 6.4 Densité des données

Les simulations précédentes ont été réalisées dans le cas de données de surface relativement denses (un point de mesure tous les  $dx$ ). On termine en présentant des cas tests identiques aux cas tests précédents dans le cas d'une densité de données de vitesses horizontales plus réalistes (voir *e.g.* [75]). On choisit ainsi des points de mesure espacés d'environ une épaisseur  $h = 1\text{km}$ . Cette densité revient donc à environ 10 fois moins de points de mesures que dans les cas précédents. Par la suite, on considère le coefficient de friction suivant pour la génération des données synthétiques :

$$\beta_r^n(x) = a + \frac{a}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{200dx}\right) + \frac{a}{5} \sum_{i=1}^n f_i(x) \quad (6.14)$$

avec  $dx = 100\text{m}$  la longueur d'une arête du maillage au fond et où :

$$f_1(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{100dx}\right) \quad (6.15)$$

$$f_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{50dx}\right) \quad (6.16)$$

$$f_3(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{20dx}\right) \quad (6.17)$$

et :

$$f_0(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{200dx}\right) \quad (6.18)$$

	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
Longueurs d'onde en $h = 1\text{km}$	$20h$	$10h$	$5h$	$2h$
Longueurs d'onde en $dx = 100\text{m}$	$200dx$	$100dx$	$50dx$	$20dx$
Fréquences relative à la longueur du domaine $L = 33.3\text{km}$	1.66Hz	3.33Hz	6.66Hz	16.6Hz

**Table 6.3:** Caractéristiques du signal  $\beta$  donné par (6.14).

Le coefficient de friction choisi pour cette simulation présente des fréquences plus basses que les cas précédents et simule donc une onde porteuse de longueur d'onde  $20h$  perturbée par des hautes fréquences correspondant à  $10h$ ,  $5h$  et  $2h$ . Ces caractéristiques sont résumées dans le tableau 6.3. Les résultats sont présentés en Figure 6.10 pour un niveau de bruit de 1%.

De manière logique, on a perdu le niveau d'identifiabilité observé pour des données denses. Cependant, considérant que l'on n'a conservé qu'un point de mesure sur 10, les résultats semblent relativement probants. La méthode exacte est capable de retrouver avec précision les fréquences de longueurs d'onde  $20h$  et  $10h$  (correspondant à  $f_0$  et  $f_1$ ) pour tous les niveaux de glissement. La méthode "auto-adjointe" retrouve également relativement bien la fréquence  $f_0$  bien qu'une friction plus forte ( $r \leq 0.05$ ) nuise distinctement à l'amplitude reconstruite pour cette fréquence. Elle capte la fréquence  $f_1$  pour les situations favorables ( $0.5 \leq r \leq 5$ ). La fréquence  $f_2$  (de longueur d'onde  $5h$ , soit la plus basse fréquence utilisée pour le cas de données dense) est partiellement retrouvée par la méthode exacte pour  $r \leq 5$  tandis que la méthode "auto-adjointe" ne la capte jamais.

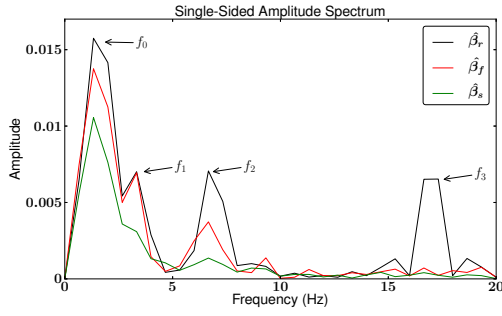
Le cas  $r = 50$  est beaucoup moins problématique que précédemment car les fréquences considérées sont bien plus basses et donc moins locales par rapport à la finesse de discrétisation du socle. On voit cependant une difficulté marquée pour la reconstruction de la fréquence  $f_1$  (de longueur d'onde  $10h$ ). De manière cohérente avec les simulations précédentes, le cas  $r = 50$  est le seul où la fréquence  $f_2$  de longueurs d'onde  $5h$  n'apparaît pas dans le spectre de  $\hat{\beta}_f$ .

## 6.5 Conclusion

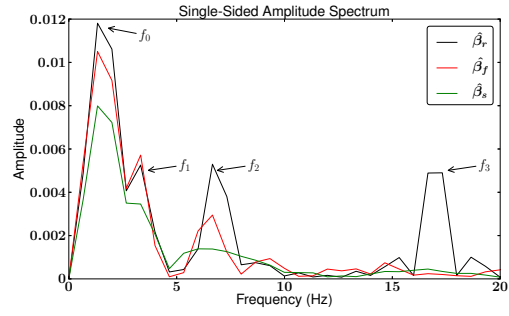
Le gain significatif en temps de calcul apporté par la méthode "auto-adjointe" représente un atout important en sa faveur. Cependant, sa fiabilité est discutable et il est important d'en connaître les limites pour la réalisation d'expériences réalistes.

Pour la situation la plus réaliste (données peu denses, bruit de 1%, topographie réelle, friction non-linéaire, cf. section 6.4), on conclut que la méthode exacte permet de représenter fidèlement, pour tout facteur de glissement, des longueurs d'onde supérieures ou égales à 10 épaisseurs et de capter des effets jusqu'à des longueurs d'ondes de 5 épaisseurs pour des facteurs de glissement inférieurs à 5.

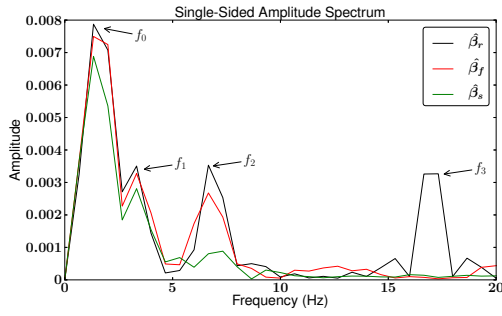




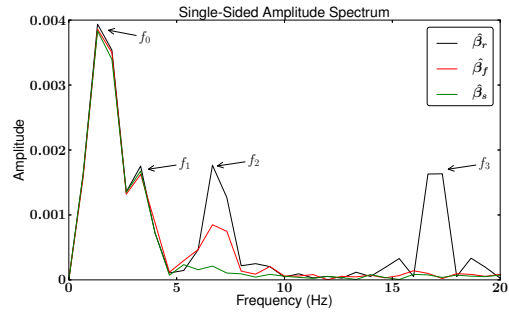
(a) Bruit réaliste  $\delta = 1\%$ ,  $r = 0.005$



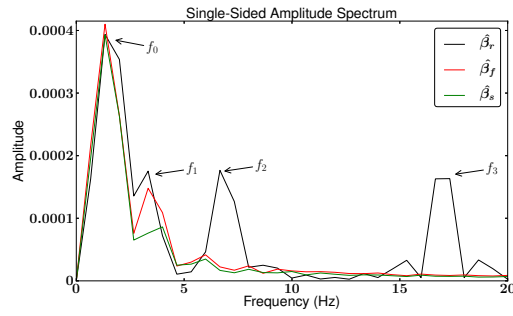
(b) Bruit réaliste  $\delta = 1\%$ ,  $r = 0.05$



(c) Bruit réaliste  $\delta = 1\%$ ,  $r = 0.5$



(d) Bruit réaliste  $\delta = 1\%$ ,  $r = 5$



(e) Bruit réaliste  $\delta = 1\%$ ,  $r = 50$

**Figure 6.10:** Transformée de Fourier discrète des coefficients de friction identifiés  $\beta_f$  et  $\beta_s$  et du coefficient de friction cible  $\beta_r$  pour des données peu denses.

La méthode "auto-adjointe" reconstruit correctement des longueurs d'onde supérieures ou égales à 20 épaisseurs (avec une faiblesse marquée pour le cas de friction forte). Les longueurs d'onde de l'ordre de 10 épaisseurs sont accessibles pour les situations favorables d'un glissement intermédiaire ( $0.5 \leq r \leq 5$ ).

Les résultats de la méthode exacte sont significativement meilleurs que ceux donnés par [133] (qui donnent une limite de 20 épaisseurs de glace pour une rhéologie non-linéaire). Il est cependant difficile de comparer considérant que les auteurs ne donnent pas le facteur de glissement correspondant ni la densité des données utilisées. De plus les auteurs de [133] utilisent une loi de friction linéaire.

L'utilisation d'une loi de friction non-linéaire permet de simuler des comportements complexes de l'interaction entre la glace et son socle rocheux. Ce type de loi peut représenter une déformation non-linéaire de la couche de sédiment basal ou bien une réponse non-linéaire de la vitesse de glissement à la pression d'eau des cavités sous glaciaires. Les reconstructions précédentes s'attachent à l'identification d'un coefficient générique  $\beta$ . Cependant, on peut sans risque généraliser les résultats à des lois plus complexes où l'on chercherait à identifier  $\beta$  à travers sa paramétrisation (par une pression d'eau, une surface de contact avec les cavités sous-glaciaires, une rugosité sédimentaire, un flux géothermique, ...). Il est important de rappeler que la surparamétrisation est rarement favorable et que l'identification de plusieurs paramètres simultanément aura tendance à accentuer le problème d'équifinalité (*i.e.* le caractère mal posé du problème d'optimisation).

Les présents résultats s'attachent à l'identification du coefficient de friction qui, comme vu précédemment, joue un rôle majeur dans le contrôle de l'écoulement (*i.e.* le modèle présente une grande sensibilité à la friction). L'identification d'un paramètre tel que la constante rhéologique  $\eta_0$  pour laquelle le modèle présente une sensibilité réduite est à prendre avec précaution dans le cas de la méthode exacte (cf. section 5.8.3) et donc avec une précaution redoublée pour le cas de la méthode incomplète.

Enfin, l'adjoint obtenu par différentiation automatique permet de simuler tout niveau de précision requis entre la précision maximale de l'adjoint exact et la précision minimale de la méthode "auto-adjointe" ouvrant la porte à une nouvelle méthodologie d'approximation comme peut nommer *méthode de l'adjoint incomplet*. L'approximation est très ajustable permettant réaliser le bon compromis entre temps de calcul, occupation mémoire et précision souhaitée. Les expériences numériques montrent que la rétention des deux derniers états dans le calcul du gradient améliore significativement la précision pour un coût tout à fait réduit.



# Conclusion générale et perspectives

On rappelle dans ce chapitre de conclusion les principaux développements réalisés au cours de ce travail de thèse ainsi que les résultats essentiels avant de conclure sur les atouts et limitations des travaux présentés. Enfin, des perspectives sont proposées, notamment sur la question de la modélisation de la ligne d'échouage en glaciologie.

**Conclusion** L'objet global des travaux menés est la modélisation variationnelle d'écoulements géophysiques non-newtoniens tels que ceux de glace ou de lave. La résolution numérique du système d'équations primitives (*i.e.* modèle de Stokes non linéaire, par opposition aux modélisations de type ondes longues) est réalisée en éléments finis trois champs en variables vitesse-pression-déformations. La modélisation inverse repose sur la résolution du problème adjoint associé au problème de Stokes pour les fluides en loi de puissance, problème encore non traité dans la communauté glaciologique au commencement de ces travaux et encore très marginalement traité aujourd'hui.

Résulte de la conjonction d'une modélisation directe précise et d'une modélisation inverse exacte une capacité à évaluer et quantifier précisément les potentiels et limitations de ce type d'approches pour les problèmes géophysiques d'écoulements non-newtoniens en loi de puissance (par opposition aux méthodes approximatives, *e.g.* la méthode dite "auto-adjointe"). Les résultats avancés sont alors fiables et précis dans le sens où les modèles mathématiques directs et adjoints sont complets et les schémas numériques d'ordre deux.

La première étape a été la dérivation d'un algorithme performant pour la résolution du problème direct. La minimisation de la dissipation de l'énergie, formulée comme un problème de point-selle à quatre champs, pour lequel l'existence d'une solution est démontrée, est résolue par un algorithme de type lagrangien augmenté. L'algorithme résultant **LA** et sa variante **LA $\theta$**  montrent des coûts de calcul très intéressants par rapport aux méthodes standards que sont la méthode de point fixe et la méthode de Newton-Raphson. L'utilisation d'une discrétisation par éléments finis discontinus est exploitée, menant à une amélioration de performance significative tout en réduisant très fortement l'occupation mémoire requise pour la résolution. Des ratios de 4 en coût CPU et 30 en occupation mémoire sont obtenus sur la résolution d'un écoulement réaliste par rapport à l'utilisation d'une méthode de point

fixe. L'extension de cet algorithme à la troisième dimension est naturelle et les gains ainsi obtenus ouvrent donc des perspectives intéressantes pour une utilisation moins restrictive de la modélisation en équations primitives au sein des modèles de calottes.

L'outil d'analyse de sensibilité issu du modèle adjoint est présenté comme l'outil principal de la modélisation variationnelle inverse et ses larges capacités sont mises en avant. Des études de sensibilité du modèle au paramètre de friction montrent la capacité à détecter des événements hautes fréquences dans la variabilité basale (de l'ordre de 2 fois l'épaisseur de l'écoulement). La qualité de la transmission de la variabilité basale à la surface de l'écoulement est quantifiée selon les régimes de glissement rencontrés. Les situations de fortes frictions (proche-adhérence) montrent une sensibilité réduite amoindrissant les possibilités de reconstruction du coefficient de friction à partir de données de vitesses de surface horizontales. Les frictions très faibles (glissement rapide) montrent une sensibilité lissée, contenant moins d'informations sur les hautes fréquences de la variabilité basale. Il apparaît une gamme de valeurs favorable à la transmission d'informations vers la surface correspondant à des régimes de glissement intermédiaires (importance relative similaire des effets de déformation et des effets de glissement sur la dynamique résultante).

Parallèlement, la sensibilité à la rhéologie se montre très instructive. Les analyses de sensibilité à la consistance du fluide  $\eta_0$  montrent que, dans le cas d'un profil de vitesse vertical de type Poiseuille (adhérence ou forte friction), cette sensibilité est concentrée à proximité du socle. À l'inverse, pour un écoulement de type piston (friction faible ou nulle), la sensibilité à  $\eta_0$  se répartit plus sur la verticale. En quelque sorte, les sensibilités à  $\eta_0$  permettent donc une détection des différents régimes d'écoulements. La présence d'un gradient de température entre la surface et le fond a un effet de convexification du profil d'écoulement, le rapprochant d'un écoulement de type Poiseuille et donc réduisant la sensibilité à  $\eta_0$  sur l'épaisseur.

La singularité de viscosité apparente infinie, inhérente à la modélisation en loi de puissance (pour les fluides rhéofluidifiant,  $n > 1$ ) dans des écoulements à surface libre, s'avère sans conséquence sur la dynamique et ne nécessite à priori pas de traitement particulier.

Plus globalement, les analyses de sensibilité menées sur ces écoulements relativement minces (un rapport d'aspect de 10 à 100 est presque tout le temps considéré) quantifient le rôle majeur de la modélisation au fond ; la transmission de la variabilité basale à la surface étant largement filtrée et plutôt non-locale, l'établissement de lien physique avec les différentes modélisations (friction, thermique, rhéologie) est relativement difficile à appréhender sans l'aide de telles analyses de sensibilité.

Basées sur ces analyses de sensibilité, des identifications de l'exposant rhéolo-

---

gique scalaire et de la consistance du fluide spatialement distribuée sont réalisées. Le rôle largement dominant de l'exposant rhéologique dans le modèle numérique, par rapport à la consistance, est établi. Il en résulte une possibilité d'identification de l'exposant rhéologique précise en présence de données de vitesses de surface de très faible qualité. À l'inverse, l'identification de la consistance et donc de la thermique sous-jacente se montre peu fiable, et une modélisation thermique amont dont la validité est reconnue (profil de température, loi d'Arrhenius) semble plus pertinente qu'une reconstruction incertaine de ce paramètre à partir d'observations de vitesses de surface. Ces résultats numériques soulèvent la question de la possibilité d'une intégration de la modélisation thermique dans la description de l'exposant rhéologique plutôt que dans celle de la consistance du fluide ; si une telle modélisation est opportune d'un point de vue mécanique, elle aura une influence bien plus grande sur la réponse du modèle et les possibilités d'identification seront grandement améliorées.

L'ensemble de ces démarches, élaborées pour le contexte de la modélisation glaciologique, sont généralisées à des contextes plus larges. L'algorithme **LA** proposé n'est aucunement spécifique à la modélisation glaciologique. L'approche de rhéométrie virtuelle est volontairement proposée dans un objectif de généralisation et appliquée aux écoulements de lave.

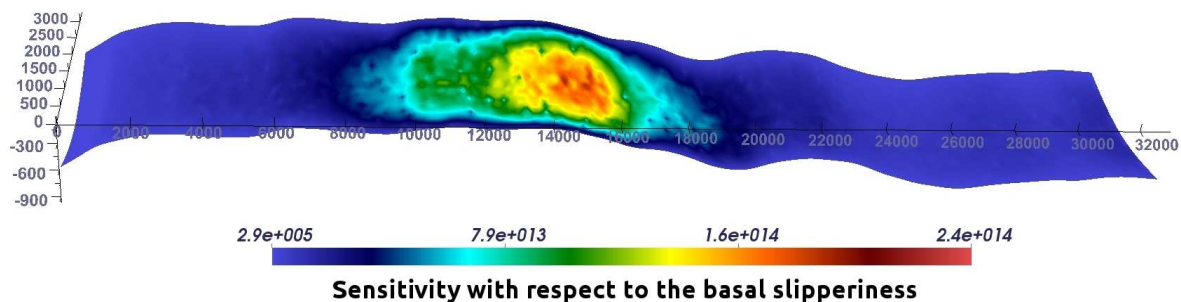
Enfin, la démarche de comparaison de l'approximation "auto-adjointe", spécifiquement employée en glaciologie, à la méthode de l'adjoint exact, dans un cadre de différentiation automatique et d'accumulation retour, ouvre des perspectives plus générales sur une nouvelle approche de modélisation inverse permettant de réduire fortement les coûts de calcul : bien que d'une précision inférieure, cette approximation dite "auto-adjointe" et surtout sa généralisation à une méthode d'*adjoint incomplet* proposée ici (consistant à ne retenir qu'une partie des itérations pour le calcul de l'état adjoint) montre des capacités solides à moindre coût et peut s'avérer particulièrement adaptée aux analyses de sensibilité et reconstructions de paramètres sur des problèmes de grande taille.

Finalement, ce travail réalise également une synthèse de savoir-faire mathématiques, numériques et de modélisation à travers le code de calcul 2D vertical *DassFlow-Ice*<sup>1</sup>, développé au cours de la thèse. Ce code a été diffusé au sein de la communauté des glaciologues, auprès des collègues du Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement de Grenoble (dans le cadre de notre collaboration au sein du projet ANR ADAGe 2010-2013). Bien que prospectif, car bidimensionnel, l'ensemble des méthodes qui le compose s'étend naturellement au problème 3D. La version tridimensionnelle dénommée *DassFlow-3D*, développée à partir de la présente version 2D, essentiellement par Ronan madec<sup>2</sup>, est à ce jour opérationnelle au

---

1. <http://www-gmm.insa-toulouse.fr/~monnier/DassFlow/>

2. Ingénieur de recherche - IMT et INSA Toulouse - Financement ANR AMAC 2010-2013



**Figure 7.1:** Écoulement de glace sur une topographie fictive issu d'un profil vertical du glacier Mertz (voir [67]). Sensibilité au coefficient de friction  $\beta$ .

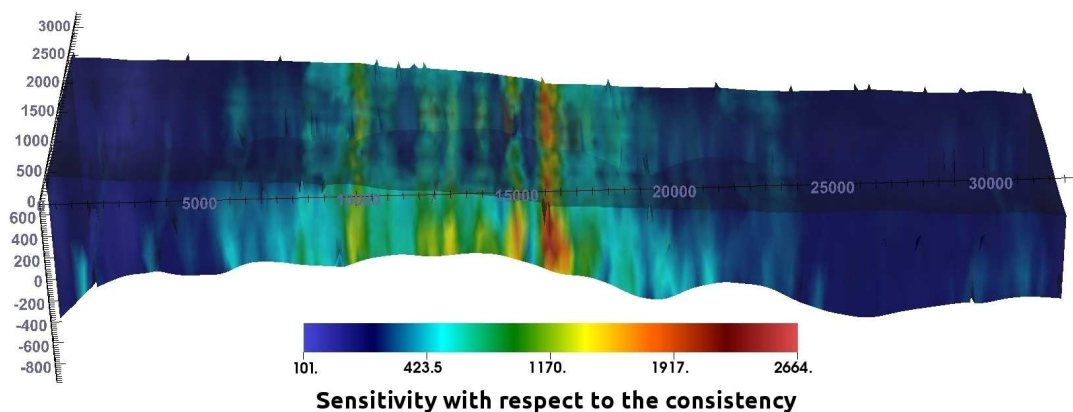
sein de notre équipe.

**Perspectives possibles et problème ouvert** La première perspective au logiciel *DassFlow-Ice* développé au cours de cette thèse est son extension à trois dimensions. Cette extension est aujourd'hui opérationnelle pour la modélisation directe et adjointe sur la base d'une description vitesse-pressure. En guise d'illustration, on présente ci-dessous deux analyses de sensibilité relativement à la consistance du fluide et au coefficient de friction. Le domaine de calcul a été construit à partir du profil radar d'une ligne d'écoulement du glacier Mertz, largement utilisé précédemment. L'extrusion fictive du profil dans la direction transverse est faite sur la base d'un sinus perturbé. Le maillage tétraédrique compte environ 125000 cellules soit 200000 degrés de libertés vitesses et 30000 degrés de liberté pression. Les observations de vitesse de surface sont obtenues pour un glissement basal  $\beta$  amenant un facteur de glissement de 1 (voir equation (6.7)). Le bord entrant est soumis à une condition de Dirichlet décrite par le Poiseuille non-linéaire (5.22) et le bord sortant impose une condition de Neumann de pression hydrostatique. Les bords latéraux imposent également une condition de friction (plus forte). Le gradient est calculé autour d'une valeur  $\beta_0 = \beta/10$ . Les résultats de sensibilité obtenus sont présentés sur les figures 7.1 et 7.2 pour le coefficient de friction et la consistance respectivement.

Les sensibilités résultantes correspondent tout à fait à celles obtenues en deux dimensions. La bosse dans la topographie autour de  $x = 14\text{km}$  demeure la zone de haute sensibilité (aussi bien à la friction qu'à la consistance). La sensibilité à la consistance est calculée dans le cas d'un glissement basal relativement important (facteur de glissement de 1) d'où la propagation nette d'un fort gradient sur l'épaisseur du glacier (à comparer à la figure 5.6(a)).

Ces calculs préliminaires mettent en évidence la validité physique des résultats bi-dimensionnels obtenus mais aussi le rôle très fort de la topographie également valable en 3D et donc l'intérêt majeur d'une telle modélisation. La structure d'optimisation-

(ANR-09-RISK-001) et co-financement ANR ADAGe 2010-2013 (ANR-09-SYSC-001)



**Figure 7.2:** Écoulement de glace sur une topographie fictive issu d'un profil vertical du glacier Mertz (voir [67]). Sensibilité à la consistance du fluide  $\eta_0$ .

assimilation, non présentée ici, est également validée et opérationnelle sur le même fonctionnement que celle utilisée dans la version bidimensionnelle *DassFlow-Ice*.

Un développement plus complet du logiciel passe cependant par l'implémentation du modèle adjoint pour le problème instationnaire à surface libre. Un tel développement nécessite une approche de type optimisation de forme (lié à la présence d'un domaine mobile au sein d'une modélisation Stokes). Une telle extension n'est probablement pas indispensable dans le cadre d'écoulements quasi-statiques mais reste à évaluer dans un contexte de temps grand ou de dynamique rapide.

Par ailleurs, l'algorithme **LA** mériterait une généralisation à des lois de comportement de type Herschel-Bulkley intégrant un seuil de contrainte (comme les avalanches de boue et de neige dense) étant donné que les méthodes utilisées sont adaptées à la résolution de problèmes présentant une non-différentiabilité de ce type. Cette généralisation semble tout à fait abordable.

Le cadre d'une modélisation en équations primitives considéré tout au long de ce travail amène aussi à voir comme perspective principale l'application de cette modélisation au problème de point triple associé à la ligne d'échouage.

Comme précédemment remarqué (voir section 1.4), l'une des lacunes fondamentales de la modélisation glaciologique demeure la capacité à réaliser un couplage multiéchelle de la dynamique continentale multirégime, de la dynamique des plateformes de glace et de la dynamique à petite échelle de la transition à la ligne d'échouage. On peut donc voir qu'un des rôles essentiels du modèle de Stokes est de réaliser la modélisation fine de la dynamique du point de contact qu'est la ligne d'échouage et, par là même, de jouer le rôle de jonction entre des modèles ondes longues pour la glace posée et la glace flottante. Le problème du mouvement de la



ligne d'échouage est un problème de contact. Le problème mécanique généralement associé au problème d'une ligne de contact mobile modélisée avec les équations de Stokes est l'apparition éventuelle d'une énergie de dissipation (voir équation (4.33)) non bornée (et donc non physique) dans un voisinage du point de contact dans le cas d'une condition limite d'adhérence à la paroi. Ce phénomène est connu comme le paradoxe du point de contact dont le problème fondateur est l'étude de la modélisation de l'étalement d'une goutte soumises aux forces de tension de surface (voir *e.g.* [161]). La nécessité de l'utilisation du modèle de Stokes pour la description de la dynamique de la ligne d'échouage a déjà été mise en évidence (voir *e.g.* [174]). En l'absence de traitement spécifique de la singularité, des phénomènes caractéristiques d'un problème mal posé, donc d'un modèle non valide, apparaissent (*i.e.* une sensibilité au maillage au niveau de la ligne d'échouage, voir *e.g.* [42, 169]).

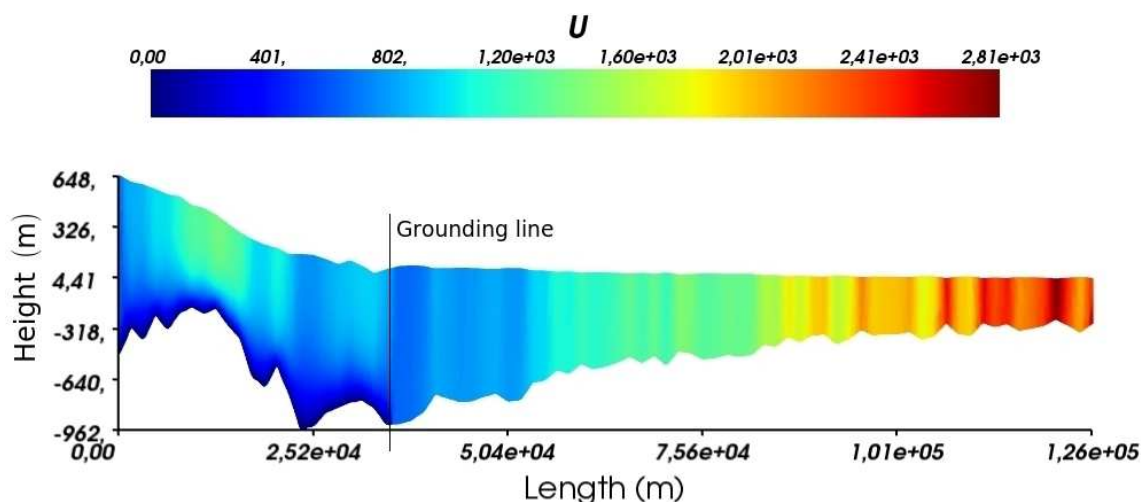
En supposant que la solution exacte, dans une boule centrée sur le point triple, puisse s'écrire, en coordonnées polaires, sous une forme à variables séparées, on chercherait un résultat de la forme :  $u(r, \theta) = r^m f(\theta)$  où  $m$  évoluerait conjointement à l'exposant rhéologique  $n$  selon une relation à établir. Cette expression pourrait alors être introduite dans la base éléments finis pour obtenir une description fine de la singularité. Ce type de calcul est réalisé, par exemple en mécanique des structures pour les problèmes de fissuration, par des méthodes de type éléments finis étendus (XFEM).

En guise d'illustration numérique du problème, nous avons réalisé des simulations directes en utilisant le profil radar vertical complet du glacier Mertz (partie posée et partie flottante) couplé à l'utilisation d'une méthode de raffinement automatique basée sur un critère d'estimation d'erreur *a posteriori* pour le problème de Stokes non-newtonien tel que celui donné dans [63]<sup>3</sup>. Le domaine de calcul issu du profil radar est représenté sur la figure 7.3. L'utilisation du critère *a posteriori* amène un raffinement très important du maillage au niveau de la ligne d'échouage (et semble donc adapté à ce problème). On résout alors sur ce domaine les équations de Stokes (2.52). Le profil de la partie flottante est réajusté pour correspondre rigoureusement à l'équilibre de flottaison. On cherche alors l'écoulement stationnaire correspondant à ce domaine : les deux surfaces libres (frontières flottante et supérieure) sont soumises à une condition de vitesse normale nulle, la frontière droite est soumise à une pression d'eau pour la partie immergée et à une contrainte nulle pour la partie émergée. On impose une vitesse calculée par (5.22) sur le bord entrant. La frontière basale en amont de la ligne d'échouage est soumise à une condition d'adhérence. La condition de vitesse normale nulle sur la frontière flottante simule un glissement parfait.

Sur ce maillage fortement raffiné au point de contact, on représente sur la figure

---

3. Développements réalisés par E. Corman et X. Morel dans le cadre d'un projet ingénieur INSA 4ème année co-encadré avec J. Monnier



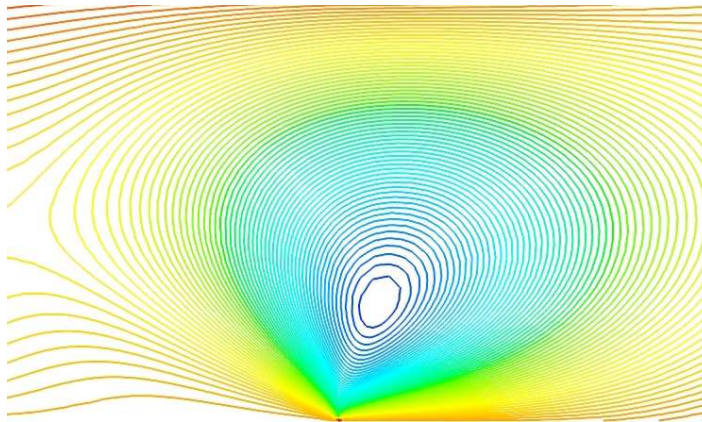
**Figure 7.3:** Norme du champ de vitesse stationnaire calculée sur le domaine obtenu à partir d'un profil radar vertical le long d'une ligne d'écoulement du glacier Mertz pour l'ensemble de la partie posée et flottante (voir figure 1.4). La ligne d'échouage se situe aux alentours de  $x = 33000\text{m}$ . L'échelle en  $x$  présente un ratio de 1/10 par rapport au ratio réel. La ligne d'échouage représente une transition adhérence-glissement parfait.

7.4 les lignes de niveau du champ de vitesse verticale  $u_z(x, z)$  calculé à proximité immédiate de la ligne d'échouage pour différentes valeurs de l'exposant rhéologique  $n$  (voir équation (2.21)). L'apparition de la singularité a bien lieu, contrairement au cas d'un maillage non raffiné, et on retrouve une évolution notable des pentes et courbures des lignes de niveau de la vitesse verticale selon la valeur de l'exposant  $n$ . La différence entre le cas newtonien ( $n = 1$ ) et les cas non-newtoniens ( $n = 3$  et  $n = 5$ ) apparaît plus marquée que la différence entre les deux cas non-newtoniens.

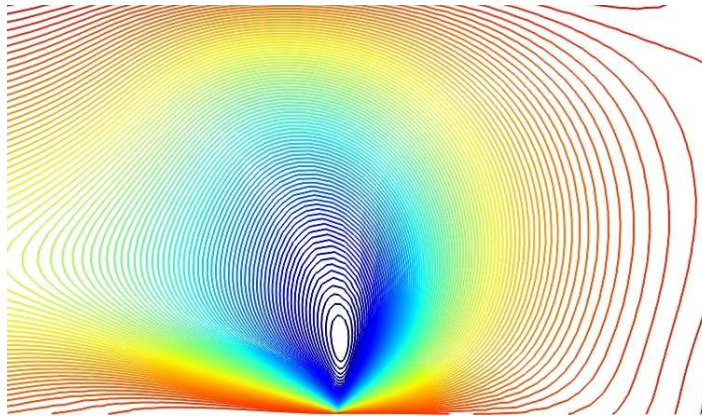
La modélisation de ce problème est toujours un des verrous majeurs à la réalisation de simulations fiables des plateformes de glace flottante et plus globalement des calottes polaires. On rappelle qu'en Antarctique, 15% du trait de côte évacue 90% de la masse.

L'étude mathématique préalable de la singularité sur les équations de Stokes est une première étape nécessaire permettant d'envisager par la suite des implémentations fines de cette description dans des modèles de calottes polaires. Le problème du couplage multimodèle du type : modélisations ondes longues multirégime de la glace posée et de la glace flottante connectées par un modèle de Stokes local décrivant la singularité à la ligne d'échouage peut être traité par des superpositions de modèle faible via le contrôle optimal comme introduite en hydraulique fluviale dans [55, 118] ou encore la méthode de tuilage récemment introduite en glaciologie dans [159].

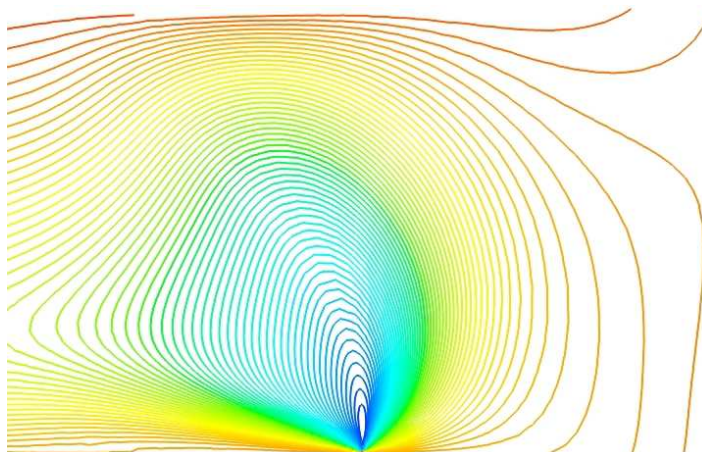
Cette démarche d'ensemble pour la modélisation des calottes polaires semble être une étape incontournable dans une perspective de prédictions fiables de leur bilan de masse.



(a)  $n=1$



(b)  $n=3$



(c)  $n=5$

**Figure 7.4:** Lignes de niveau calculées pour le champ de vitesse vertical  $u_z(x, z)$  dans le voisinage de la ligne d'échouage pour différentes valeurs de l'exposant rhéologique  $n$ .

# Bibliographie

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 2003. ISBN 9780120441433.
- [2] G. Allaire. *Numerical analysis and optimization*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, Oxford, 2007. ISBN 9780199205226.
- [3] P. R. Amestoy, I. S. Duff, J.-Y. L'Excellent, and J. Koster. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(1) :15–41, 2001. ISSN 0895-4798,1095-7162. doi : 10.1137/S0895479899358194.
- [4] C. Ancey. Plasticity and geophysical flows : A review. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 142(1) :4–35, 2007. ISSN 0377-0257. doi : 10.1016/j.jnnfm.2006.05.005.
- [5] C. Ancey and S. Cochard. The dam-break problem for Herschel-Bulkley viscoplastic fluids down steep flumes. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 158(1-3) :18–35, 2009. ISSN 0377-0257. doi : 10.1016/j.jnnfm.2008.08.008.
- [6] G. Astarita and G. Marrucci. *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*. McGraw-Hill Book Company, 1974.
- [7] M. J. Balise and C. F. Raymond. Transfer of basal sliding variations to the surface of a linearly viscous glacier. *Journal of Glaciology*, 31 :308–318, 1985. ISSN 0022-1430.
- [8] J. Bamber and J. L. Gomez-Dans. The accuracy of digital elevation models of the antarctic continent. *Earth and Planetary Science Letters*, 237(3–4) : 516–523, 2005. ISSN 0012-821X. doi : 10.1016/j.epsl.2005.06.008.
- [9] J. L. Bamber, R. L. Layberry, and S. P. Gogineni. A new ice thickness and bed data set for the greenland ice sheet : 1. measurement, data reduction, and errors. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 106(D24) :33773–33780, 2001. ISSN 2156-2202. doi : 10.1029/2001JD900054.

- [10] J. Baranger and K. Najib. Analyse numérique des écoulements quasi-newtoniens dont la viscosité obéit à la loi puissance ou la loi de carreau. *Numerische Mathematik*, 58(1) :35–49, 1990. ISSN 0029-599X, 0945-3245. doi : 10.1007/BF01385609.
- [11] J. Baranger, K. Najib, and D. Sandri. Numerical analysis of a three-fields model for a quasi-newtonian flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 109(34) :281–292, 1993. ISSN 0045-7825. doi : 10.1016/0045-7825(93)90082-9.
- [12] F. Baratelli, M. Giudici, and C. Vassena. A sensitivity analysis for an evolution model of the antarctic ice sheet. *Reliability Engineering & System Safety*, 107 : 64–70, 2012. ISSN 0951-8320. doi : 10.1016/j.ress.2011.07.003.
- [13] J. W. Barrett and W. Liu. Quasi-norm error bounds for the finite element approximation of a non-Newtonian flow. *Numerische Mathematik*, 68(4) :437–456, 1994. ISSN 0029-599X, 0945-3245. doi : 10.1007/s002110050071.
- [14] G. Batchlor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [15] R. E. Bell. The unquiet ice. *Scientific American*, 298(2) :60–67, 2008. ISSN 0036-8733. doi : 10.1038/scientificamerican0208-60.
- [16] C. R. Bentley. Antarctic ice streams : A review. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 92(B9) :8843–8858, 1987. ISSN 2156-2202. doi : 10.1029/JB092iB09p08843.
- [17] E. Berthier. Recul des glaciers de montagne : que nous apprennent les satellites ? *Météorologie*, (63) :32–39, 2008. ISSN 0026-1181.
- [18] E. Berthier, Y. Arnaud, D. Baratoux, C. Vincent, and F. Rémy. Recent rapid thinning of the "mer de glace" glacier derived from satellite optical images. *Geophysical Research Letters*, 31(17), 2004. ISSN 1944-8007. doi : 10.1029/2004GL020706.
- [19] G. Bilotta, A. Cappello, A. Hérault, A. Vicari, G. Russo, and C. Del Negro. Sensitivity analysis of the MAGFLOW cellular automaton model for lava flow simulation. *Environmental Modelling & Software*, 35 :122–131, 2012. ISSN 1364-8152. doi : 10.1016/j.envsoft.2012.02.015.
- [20] R. Bird, R. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of Polymeric liquids*. John Wiley and Sons, 1987.
- [21] H. Blatter. Velocity and stress fields in grounded glaciers : a simple algorithm for including deviatoric stress gradients. *Journal of Glaciology*, 41(138) :333–344, 1995. ISSN 0022-1430.

- 
- [22] H. Blatter, R. Greve, and A. Abe-Ouchi. A short history of the thermomechanical theory and modelling of glaciers and ice sheets. *Journal of Glaciology*, 56(200) :1087–1094, 2010. doi : 10.3189/002214311796406059.
- [23] A. C. Bordier. *Voyage pittoresque aux glaciers de Savoie, fait en 1772*. Chez L.A. Caille, imprimeur-libraire, 1773.
- [24] M. Boutonet, J. Monnier, and J.-P. Vila. Complete and quasi-static shallow models for power-law fluids. *submitted*, 2013.
- [25] M. Boutonet, J. Monnier, and J.-P. Vila. Unified model for multi-regime shallow free-surface flows of power-law fluids. *submitted*, 2013.
- [26] E. Bueler and J. Brown. Shallow shelf approximation as a “sliding law” in a thermomechanically coupled ice sheet model. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, 114(F3), 2009. ISSN 2156-2202. doi : 10.1029/2008JF001179.
- [27] D. G. Cacuci. Sensitivity theory for nonlinear systems. I. nonlinear functional analysis approach. *Journal of Mathematical Physics*, 22 :2794, 1981. doi : 10.1063/1.525186.
- [28] D. G. Cacuci. Global optimization and sensitivity analysis. *Nuclear science and engineering*, 104(1) :78–88, 1990. ISSN 0029-5639.
- [29] D. G. Cacuci. *Sensitivity & Uncertainty Analysis, Volume 1 : Theory*. CRC Press, 2003. ISBN 9780203498798.
- [30] A. Cazenave and W. Llovel. Contemporary sea level rise. *Annual Review of Marine Science*, 2(1) :145–173, 2010. doi : 10.1146/annurev-marine-120308-081105.
- [31] G. Chambon, A. Ghemmour, and D. Laigle. Gravity-driven surges of a viscoplastic fluid : An experimental study. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 158(1) :54–62, 2009. ISSN 0377-0257. doi : 10.1016/j.jnnfm.2008.08.006.
- [32] R. Champallier, M. Bystricky, and L. Arbaret. Experimental investigation of magma rheology at 300mpa : From pure hydrous melt to 76 vol.% of crystals. *Earth and Planetary Science Letters*, 267(3) :571–583, 2008. ISSN 0012-821X. doi : 10.1016/j.epsl.2007.11.065.
- [33] B. Christianson. Reverse accumulation and attractive fixed points. *Optimization Methods and Software*, 3(4) :311–326, 1994. ISSN 1055-6788. doi : 10.1080/10556789408805572.
- [34] J. Colinge and J. Rappaz. A strongly nonlinear problem arising in glaciology. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(02) :395–406, 1999. doi : 10.1051/m2an:1999122.

- [35] P. Coussot. *Rheometry of pastes, suspensions, and granular materials : applications in industry and environment*. John Wiley & Sons, 2005. ISBN 9780471720560.
- [36] K. M. Cuffey and W. S. B. Paterson. *The Physics of Glaciers*. Academic Press, 2010. ISBN 9780080919126.
- [37] DassFlow Software. Data assimilation for free-surface flows. *open source free-ware*. URL <http://www-gmm.insa-toulouse.fr/~monnier/DassFlow>.
- [38] A. Decoene and J. F. Gerbeau. Sigma transformation and ALE formulation for three-dimensional free surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 59(4) :357–386, 2009. ISSN 1097-0363. doi : 10.1002/fld.1816.
- [39] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis, deuxième édition*. Collection Université de Compiègne, 1984.
- [40] F.-X. L. Dimet and O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus A*, 38A (2) :97–110, 1986. ISSN 1600-0870. doi : 10.1111/j.1600-0870.1986.tb00459.x.
- [41] F. Duarte, R. Gormaz, and S. Natesan. Arbitrary Lagrangian-Eulerian method for Navier-Stokes equations with moving boundaries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(45-47) :4819–4836, 2004. ISSN 0045-7825. doi : 10.1016/j.cma.2004.05.003.
- [42] G. Durand, O. Gagliardini, T. Zwinger, E. Le Meur, and R. C. Hindmarsh. Full stokes modeling of marine ice sheets : influence of the grid size. *Annals of Glaciology*, 50(52) :109–114, 2009. doi : 10.3189/172756409789624283.
- [43] E. B. Dussan V. and S. H. Davis. On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 65(01) :71–95, 1974. doi : 10.1017/S0022112074001261.
- [44] I. Ekeland and R. Temam. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Bordas, 1974.
- [45] D. Elizondo, C. Faure, and B. Cappelaere. Automatic– versus manual– differentiation for non-linear inverse modeling. Technical Report RR-3981, INRIA, 2000.
- [46] H. Engelhardt and B. Kamb. Basal sliding of ice stream b, west antarctica. *Journal of Glaciology*, 44(147) :223–230, 1998. ISSN 0022-1430.
- [47] A. Ern and J. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*. Springer, 2004. ISBN 9780387205748.

- 
- [48] V. J. Ervin and H. Lee. Numerical approximation of a quasi-Newtonian Stokes flow problem with defective boundary conditions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(5) :2120–2140, 2007. ISSN 0036-1429, 1095-7170. doi : 10.1137/060669012.
- [49] V. J. Ervin, J. S. Howell, and I. Stanculescu. A dual-mixed approximation method for a three-field model of a nonlinear generalized stokes problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(3340) :2886–2900, 2008. ISSN 0045-7825. doi : 10.1016/j.cma.2008.01.022.
- [50] M. Farhloul and M. Fortin. A new mixed finite element for the stokes and elasticity problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 30(4) :971–990, 1993. ISSN 0036-1429, 1095-7170. doi : 10.1137/0730051.
- [51] M. Filippucci, A. Tallarico, and M. Dragoni. A three-dimensional dynamical model for channeled lava flow with nonlinear rheology. *Journal of Geophysical Research*, 115(B5) :B05202, 2010. ISSN 0148-0227. doi : 10.1029/2009JB006335.
- [52] U. H. Fischer and G. K. C. Clarke. Stick-slip sliding behaviour at the base of a glacier. *Annals of Glaciology*, 24 :390–396, 1996.
- [53] T. Flament, E. Berthier, and F. Rémy. Cascading water underneath Wilkes land, east Antarctic ice sheet, observed using altimetry and digital elevation models. *The Cryosphere Discussions*, 7(2) :841–871, 2013. ISSN 1994-0440. doi : 10.5194/tcd-7-841-2013.
- [54] P. Fretwell, H. D. Pritchard, D. G. Vaughan, J. L. Bamber, N. E. Barrand, R. Bell, C. Bianchi, R. G. Bingham, D. D. Blankenship, G. Casassa, G. Catania, D. Callens, H. Conway, A. J. Cook, H. F. J. Corr, D. Damaske, V. Damm, F. Ferraccioli, R. Forsberg, S. Fujita, Y. Gim, P. Gogineni, J. A. Griggs, R. C. A. Hindmarsh, P. Holmlund, J. W. Holt, R. W. Jacobel, A. Jenkins, W. Jokat, T. Jordan, E. C. King, J. Kohler, W. Krabill, M. Riger-Kusk, K. A. Langley, G. Leitchenkov, C. Leuschen, B. P. Luyendyk, K. Matsuoka, J. Mouginot, F. O. Nitsche, Y. Nogi, O. A. Nost, S. V. Popov, E. Rignot, D. M. Rippin, A. Rivera, J. Roberts, N. Ross, M. J. Siegert, A. M. Smith, D. Steinhage, M. Studinger, B. Sun, B. K. Tinto, B. C. Welch, D. Wilson, D. A. Young, C. Xiangbin, and A. Zirizzotti. Bedmap2 : improved ice bed, surface and thickness datasets for antarctica. *The Cryosphere*, 7(1) :375–393, Feb. 2013. ISSN 1994-0424. doi : 10.5194/tc-7-375-2013.
- [55] I. Gejadze and J. Monnier. On a 2D ‘zoom’ for the 1D shallow water model : Coupling and data assimilation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45–48) :4628–4643, Sept. 2007. ISSN 0045-7825. doi : 10.1016/j.cma.2007.05.026.



- [56] J. C. Gilbert and C. Lemaréchal. The module M1QN3 - version 3.1. *INRIA Rocquencourt & Rhone-Alpes*, 2006. URL <https://who.rocq.inria.fr/Jean-Charles.Gilbert/modulopt/optimization-routines/m1qn3/m1qn3.pdf>.
- [57] J. C. Gilbert and C. Lemaréchal. Some numerical experiments with variable-storage quasi-newton algorithms. *Mathematical Programming*, 45(1-3) :407–435, 1989. ISSN 0025-5610, 1436-4646. doi : 10.1007/BF01589113.
- [58] F. Gillet-Chaulet, O. Gagliardini, J. Meyssonier, M. Montagnat, and O. Castelnau. A user-friendly anisotropic flow law for ice-sheet modelling. *Journal of Glaciology*, 51(172) :3–14, 2005. doi : 10.3189/172756505781829584.
- [59] J. Glen. The creep of polycrystalline ice. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 228(1175) :519–538, 1955. doi : 10.1098/rspa.1955.0066.
- [60] R. Glowinski. *Lectures on Numerical Methods for Non-Linear Variational Problems*. Springer, 2008. ISBN 9783540775065.
- [61] R. Glowinski and P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting methods in non-linear mechanics*. SIAM, 1989.
- [62] R. Glowinski and A. Marocco. Sur l’approximation par éléments finis d’ordre 1 et la résolution par pénalisatio-dualité d’une classe de problèmes de Dirichlet non-linéaires. *Revue française d’Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle-Analyse Numérique*, R-2 :41–76, 1975.
- [63] R. Glowinski and J. Rappaz. Approximation of a nonlinear elliptic problem arising in a non-Newtonian fluid flow model in glaciology. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(01) :175–186, 2003. doi : 10.1051/m2an:2003012.
- [64] R. Glowinski and A. Wachs. On the numerical simulation of viscoplastic fluid flow. In R. Glowinski and J. Xu, editor, *Handbook of Numerical Analysis*, volume Volume 16, pages 483–717. Elsevier, 2011. ISBN 1570-8659.
- [65] D. N. Goldberg and O. V. Sergienko. Data assimilation using a hybrid ice flow model. *The Cryosphere, Volume 5, Issue 2, 2011, pp.315-327*, 5 :315–327, 2011. doi : 10.5194/tc-5-315-2011.
- [66] R. M. Goldstein, H. Engelhardt, B. Kamb, and R. M. Frolich. Satellite radar interferometry for monitoring ice sheet motion : application to an Antarctic ice stream. *Science*, 262(5139) :1525–1530, 1993. ISSN 0036-8075.

- 
- [67] J. S. Greenbaum, D. D. Blankenship, D. A. Young, T. G. Richter, B. Legresy, B. Galton-Fenzi, and Y. Gim. Basal characteristics and inferred bathymetry beneath the mertz glacier tongue, antarctica from coupled airborne radar sounding and gravity prior to the february 12th 2010 breakup event. In *4th SCAR Open Science Conference - Antarctica : Witness to the Past and Guide to the Future. Submitted Abstracts*, 2010. ISBN 978 0 948277 24 5.
- [68] E. Greenspan. Developments in perturbation theory. *Advances in Nuclear Science and Technology*, 9 :181–268, 1976.
- [69] R. Greve and H. Blatter. *Dynamics of ice sheets and glaciers*. Springer, 2009. ISBN 9783540742982.
- [70] A. Griewank and A. Walther. *Evaluating Derivatives : Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. SIAM, 2008. ISBN 9780898716597.
- [71] A. Griewank, C. Bischof, G. Corliss, A. Carle, and K. Williamson. Derivative convergence for iterative equation solvers. *Optimization Methods and Software*, 2(3-4) :321–355, 1993. ISSN 1055-6788. doi : 10.1080/10556789308805549.
- [72] A. Griewank et al. On automatic differentiation. *Mathematical Programming : recent developments and applications*, 6 :83–107, 1989.
- [73] R. W. Griffiths. The dynamics of lava flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32(1) :477–518, 2000. doi : 10.1146/annurev.fluid.32.1.477.
- [74] G. H. Gudmundsson. Transmission of basal variability to a glacier surface. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 108(B5), 2003. ISSN 2156-2202. doi : 10.1029/2002JB002107.
- [75] G. H. Gudmundsson and M. Raymond. On the limit to resolution and information on basal properties obtainable from surface data on ice streams. *The Cryosphere Discussions*, 2(3) :413–445, 2008.
- [76] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences, 2001. ISBN 9782868835024.
- [77] C. D. Han. Multiphase flow in polymer processing. In G. Astarita, G. Marrucci, and L. Nicolais, editors, *Rheology*, pages 121–128. Springer US, 1980. ISBN 978-1-4684-3748-5, 978-1-4684-3746-1.
- [78] A. Harris, J. Bailey, S. Calvari, and J. Dehn. Heat loss measured at a lava channel and its implications for down-channel cooling and rheology. *Geological Society of America Special Papers*, 396 :125–146, 2005.
- [79] L. Hascoët and V. Pascual. TAPENADE 2.1 user’s guide. 2004. URL <http://www-tapenade.inria.fr:8080/tapenade/index.jsp>.

- [80] P. Heimbach and V. Bugnion. Greenland ice-sheet volume sensitivity to basal, surface and initial conditions derived from an adjoint model. *Annals of Glaciology*, 50(52) :67–80, 2009. doi : 10.3189/172756409789624256.
- [81] R. C. A. Hindmarsh. A numerical comparison of approximations to the stokes equations used in ice sheet and glacier modeling. *Journal of Geophysical Research*, 109(F1) :F01012, 2004. ISSN 0148-0227. doi : 10.1029/2003JF000065.
- [82] M. Honnorat. *Assimilation de données lagrangiennes pour la simulation numérique en hydraulique fluviale*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2007.
- [83] M. Honnorat, J. Marin, J. Monnier, and X. Lai. Dassflow v1.0 : a variational data assimilation software for 2D river flows. *INRIA Research Report*, RR-6150, 2007. URL <http://hal.inria.fr/inria-00137447>.
- [84] K. Hutter. The effect of longitudinal strain on the shear stress of an ice sheet : in defence of using stretched coordinates. *Journal of Glaciology*, 27 :39–56, 1981. ISSN 0022-1430.
- [85] P. Huybrechts and J. Oerlemans. Evolution of the east Antarctic ice sheet : a numerical study of thermo-mechanical response patterns with changing climate. *Annals of glaciology*, 11 :52–59, 1988.
- [86] A. Iken. The effect of the subglacial water pressure on the sliding velocity of a glacier in an idealized numerical model. *Journal of Glaciology*, 27 :407–421, 1981. ISSN 0022-1430.
- [87] Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC). Impacts, adaptation and vulnerability. *Global Climate Projections*, Fourth Assessment Report, 2007.
- [88] Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC). Climate change 2007 : The physical science basis. *Global Climate Projections*, Fourth Assessment Report, 2007.
- [89] I. R. Ionescu and M. Sofonea. *Functional and numerical methods in viscoplasticity*. Oxford mathematical monographs, ISSN 0964-9174. Oxford University Press, 1993. ISBN 0-19-853590-2.
- [90] F. Irgens. *Continuum Mechanics*. Springer, 2008. ISBN 9783540742982.
- [91] R. M. Iverson. The physics of debris flows. *Reviews of Geophysics*, 35(3) : 245–296, 1997. ISSN 8755-1209. doi : 10.1029/97RG00426.
- [92] J. Johnson and J. L. Fastook. Northern hemisphere glaciation and its sensitivity to basal melt water. *Quaternary International*, 95–96 :65–74, 2002. ISSN 1040-6182. doi : 10.1016/S1040-6182(02)00028-9.

- 
- [93] I. Joughin, D. R. MacAyeal, and S. Tulaczyk. Basal shear stress of the Ross ice streams from control method inversions. *Journal of Geophysical Research*, 109(B9) :B09405, 2004. ISSN 0148-0227. doi : 10.1029/2003JB002960.
- [94] I. Joughin, S. Tulaczyk, J. L. Bamber, D. Blankenship, J. W. Holt, T. Scambos, and D. G. Vaughan. Basal conditions for Pine Island and Thwaites Glaciers, west Antarctica, determined using satellite and airborne data. *Journal of Glaciology*, 55(190) :245–257, 2009. doi : 10.3189/002214309788608705.
- [95] I. Joughin, B. E. Smith, I. M. Howat, T. Scambos, and T. Moon. Greenland flow variability from ice-sheet-wide velocity mapping. *Journal of Glaciology*, 56(197) :415–430, 2010. doi : 10.3189/002214310792447734.
- [96] G. Jouvét, M. Picasso, J. Rappaz, and H. Blatter. A new algorithm to simulate the dynamics of a glacier : theory and applications. *Journal of Glaciology*, 54 (188) :801–811, 2008. doi : 10.3189/002214308787780049.
- [97] G. Jouvét, M. Huss, H. Blatter, M. Picasso, and J. Rappaz. Numerical simulation of rhonegletscher from 1874 to 2100. *Journal of Computational Physics*, 228(17) :6426–6439, 2009. ISSN 0021-9991. doi : 10.1016/j.jcp.2009.05.033.
- [98] A. Khazendar, E. Rignot, and E. Larour. Acceleration and spatial rheology of Larsen C ice shelf, Antarctic peninsula. *Geophysical Research Letters*, 38(9), 2011. ISSN 1944-8007. doi : 10.1029/2011GL046775.
- [99] M. King. Rigorous GPS data-processing strategies for glaciological applications. *Journal of Glaciology*, 50(171) :601–607, 2004. doi : 10.3189/172756504781829747.
- [100] N. Kirchner, K. Hutter, M. Jakobsson, and R. Gyllencreutz. Capabilities and limitations of numerical ice sheet models : a discussion for earth-scientists and modelers. *Quaternary Science Reviews*, 30(25–26) :3691–3704, 2011. ISSN 0277-3791. doi : 10.1016/j.quascirev.2011.09.012.
- [101] J. Kohler. Glaciology : Lubricating lakes. *Nature*, 445(7130) :830–831, Feb. 2007. ISSN 0028-0836. doi : 10.1038/445830a.
- [102] J. Korona, E. Berthier, M. Bernard, F. Rémy, and E. Thouvenot. SPIRIT. SPOT 5 stereoscopic survey of polar ice : Reference images and topographies during the fourth international polar year (2007–2009). *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 64(2) :204–212, 2009. ISSN 0924-2716. doi : 10.1016/j.isprsjprs.2008.10.005.
- [103] X. Lai and J. Monnier. Assimilation of spatially distributed water levels into a shallow-water flood model. part i : Mathematical method and test case. *Journal of Hydrology*, 377(1-2) :1–11, 2009. ISSN 0022-1694. doi : 10.1016/j.jhydrol.2009.07.058.

- [104] E. Larour, E. Rignot, I. Joughin, and D. Aubry. Rheology of the ronne ice shelf, antarctica, inferred from satellite radar interferometry data using an inverse control method. *Geophysical Research Letters*, 32(5) :L05503, 2005. ISSN 0094-8276. doi : 10.1029/2004GL021693.
- [105] E. Larour, J. Schiermeier, E. Rignot, H. Seroussi, M. Morlighem, and J. Paden. Sensitivity analysis of pine island glacier ice flow using ISSM and DAKOTA. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, 117(F2), 2012. ISSN 2156-2202. doi : 10.1029/2011JF002146.
- [106] F.-X. Le Dimet, H. Ngodock, B. Luong, and J. Verron. Sensitivity analysis in variational data assimilation. *Meteorological Society of Japan*, 75 :135–145, 1997.
- [107] E. Le Meur, O. Gagliardini, T. Zwinger, and J. Ruokolainen. Glacier flow modelling : a comparison of the shallow ice approximation and the full-stokes solution. *Comptes Rendus Physique*, 5(7) :709–722, 2004. ISSN 1631-0705. doi : 10.1016/j.crhy.2004.10.001.
- [108] H. Lee. Optimal control for quasi-newtonian flows with defective boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200 (33) :2498–2506, 2011. ISSN 0045-7825. doi : 10.1016/j.cma.2011.04.019.
- [109] B. Legrésy, A. Wendt, I. Tabacco, F. Rémy, and R. Dietrich. Influence of tides and tidal current on mertz glacier, antarctica. *Journal of Glaciology*, 50(170) : 427–435, 2004. doi : 10.3189/172756504781829828.
- [110] W. Leng, L. Ju, M. Gunzburger, S. Price, and T. Ringler. A parallel high-order accurate finite element nonlinear stokes ice sheet model and benchmark experiments. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface (2003–2012)*, 117(F1), 2012. doi : 10.1029/2011JF001962.
- [111] Lions, J.L. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1971.
- [112] L. Lliboutry. General theory of subglacial cavitation and sliding of temperate glaciers. *Journal of Glaciology*, 7 :21–58, 1968. ISSN 0022-1430.
- [113] M. B. Lythe, D. G. Vaughan, and the BEDMAP consortium. BEDMAP : a new ice thickness and subglacial topographic model of antarctica. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 106(B6) :11335–11351, 2001. ISSN 2156-2202. doi : 10.1029/2000JB900449.
- [114] D. R. MacAyeal. Large-scale ice flow over a viscous basal sediment : Theory and application to ice stream b, antarctica. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 94(B4) :4071–4087, 1989. ISSN 2156-2202. doi : 10.1029/JB094iB04p04071.

- 
- [115] D. R. Macayeal. A tutorial on the use of control methods in ice-sheet modeling. *Journal of Glaciology*, 39(131) :91–98, 1993. ISSN 0022-1430.
- [116] A. Mangeney and F. Califano. The shallow ice approximation for anisotropic ice : Formulation and limits. *Journal of geophysical research*, 103(B1) :691–705, 1998. ISSN 0148-0227.
- [117] H. Manouzi and M. Farhloul. Mixed finite element analysis of a non-linear three-fields Stokes model. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 21(1) :143–164, 2001. ISSN 0272-4979, 1464-3642. doi : 10.1093/imanum/21.1.143.
- [118] J. Marin and J. Monnier. Superposition of local zoom models and simultaneous calibration for 1D–2D shallow water flows. *Mathematics and Computers in Simulation*, 80(3) :547–560, Nov. 2009. ISSN 0378-4754. doi : 10.1016/j.matcom.2009.09.001.
- [119] C. Martín, R. C. A. Hindmarsh, and F. J. Navarro. Dating ice flow change near the flow divide at roosevelt island, antarctica, by using a thermomechanical model to predict radar stratigraphy. *Journal of Geophysical Research*, 111 (F1) :F01011, 2006. ISSN 0148-0227. doi : 10.1029/2005JF000326.
- [120] C. Martín, R. C. A. Hindmarsh, and F. J. Navarro. On the effects of divide migration, along ridge flow, and basal sliding on isochrones near an ice divide. *Journal of Geophysical Research*, 114(F2) :F02006, 2009. ISSN 0148-0227. doi : 10.1029/2008JF001025.
- [121] N. Martin and J. Monnier. Four-field finite element solver for viscoplastic free-surface flows and variational sensitivity analysis. *SIAM, Journal on Scientific Computing, Under minor revision*, 2013.
- [122] B. Maury. Characteristics ale method for the unsteady 3d navier-stokes equations with a free surface. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 6(3) :175–188, 1996. ISSN 1061-8562. doi : 10.1080/10618569608940780.
- [123] L. Michel, M. Picasso, D. Farinotti, A. Bauder, M. Funk, and H. Blatter. Estimating the ice thickness of mountain glaciers with an inverse approach using surface topography and mass-balance. *Inverse Problems*, 29(3) :035002, 2013. ISSN 0266-5611. doi : 10.1088/0266-5611/29/3/035002.
- [124] J. Monnier. *Variational data assimilation : from optimal control to large scale data assimilation, Course INSA Master’s degree*. Data Assimilation for Scientists and Engineers (DASE) project, Toulouse University pedagogical project, 2013.
- [125] J. Monnier, A. M. Benselama, and I. Cotoi. Flow patterns in the vicinity of triple line dynamics arising from a local surface tension model. *International*

- Journal for Multiscale Computational Engineering*, 5(5) :417–434, 2007. ISSN 1543-1649. doi : 10.1615/IntJMultCompEng.v5.i5.50.
- [126] L. W. Morland. Unconfined ice-shelf flow. In C. J. V. d. Veen and J. Oerlemans, editors, *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*, number 4 in Glaciology and Quaternary Geology, pages 99–116. Springer Netherlands, 1987. ISBN 978-94-010-8171-9.
- [127] M. Morlighem, E. Rignot, H. Seroussi, E. Larour, H. B. Dhia, and D. Aubry. Spatial patterns of basal drag inferred using control methods from a full-stokes and simpler models for Pine Island glacier, west Antarctica. *Geophysical Research Letters*, 37(14) :L14502, 2010. ISSN 0094-8276. doi : 10.1029/2010GL043853.
- [128] V. Morozov. The error principle in the solution of operational equations by the regularization method. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 8(2) :63–87, 1968. ISSN 0041-5553. doi : 10.1016/0041-5553(68)90034-7.
- [129] G. Navas. *Amélioration de la modélisation de la calotte de glace Antarctique à partir de la topographie de la surface*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2011.
- [130] C.-O. Ng and C. C. Mei. Roll waves on a shallow layer of mud modelled as a power-law fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 263 :151–184, 1994. doi : 10.1017/S0022112094004064.
- [131] F. Parrenin and R. Hindmarsh. Influence of a non-uniform velocity field on isochrone geometry along a steady flowline of an ice sheet. *Journal of Glaciology*, 53(183) :612–622, 2007. doi : 10.3189/002214307784409298.
- [132] F. Pattyn, L. Perichon, A. Aschwanden, B. Breuer, B. De Smedt, O. Gagliardini, G. H. Gudmundsson, R. Hindmarsh, A. Hubbard, J. V. Johnson, T. Kleiner, Y. Konovalov, C. Martin, A. J. Payne, D. Pollard, S. Price, M. Rackamp, F. Saito, O. Soucek, S. Sugiyama, and T. Zwinger. Benchmark experiments for higher-order and full stokes ice sheet models (ISMIP-HOM). *The Cryosphere Discussions*, 2(1) :111–151, 2008.
- [133] N. Petra, H. Zhu, G. Stadler, T. J. R. Hughes, and O. Ghattas. An inexact Gauss-Newton method for inversion of basal sliding and rheology parameters in a nonlinear Stokes ice sheet model. *Journal of Glaciology*, 58 :889–903, 2012. doi : 10.3189/2012JoG11J182.
- [134] W. T. Pfeffer, J. T. Harper, and S. O’Neel. Kinematic constraints on glacier contributions to 21st-century sea-level rise. *Science*, 321(5894) :1340–1343, 2008. ISSN 0036-8075, 1095-9203. doi : 10.1126/science.1159099.

- 
- [135] M. Picasso, J. Rappaz, A. Reist, M. Funk, and H. Blatter. Numerical simulation of the motion of a two-dimensional glacier. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(5) :995–1009, 2004. ISSN 1097-0207. doi : 10.1002/nme.997.
- [136] O. Pironneau, J. Liou, and T. Tezduyar. Characteristic-galerkin and galerkin/least-squares space-time formulations for the advection-diffusion equation with time-dependent domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(1) :117–141, Oct. 1992. ISSN 0045-7825. doi : 10.1016/0045-7825(92)90116-2.
- [137] D. Pollard and R. M. Deconto. A coupled ice-Sheet/Ice-Shelf/Sediment model applied to a marine-margin flowline : Forced and unforced variations. In M. J. Hambrey, P. Christoffersen, N. F. Glasser, and B. Hubbard, editors, *Glacial Sedimentary Processes and Products*, page 37–52. Blackwell Publishing Ltd., 2009. ISBN 9781444304435.
- [138] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer, 2008. ISBN 9783540852674.
- [139] S. Rahmstorf. A semi-empirical approach to projecting future sea-level rise. *Science*, 315(5810) :368–370, 2007. ISSN 0036-8075, 1095-9203. doi : 10.1126/science.1135456.
- [140] C. Raymond. Shear margins in glaciers and ice sheets. *Journal of Glaciology*, 42(140) :90–102, 1996. ISSN 0022-1430.
- [141] C. F. Raymond and W. D. Harrison. Evolution of variegated glacier, alaska, usa, prior to its surge. *Journal of Glaciology*, 34(117) :154–169, 1988.
- [142] M. J. Raymond and G. H. Gudmundsson. Estimating basal properties of ice streams from surface measurements : a non-linear bayesian inverse approach applied to synthetic data. *The Cryosphere*, 3(2) :265–278, 2009. ISSN 1994-0424. doi : 10.5194/tc-3-265-2009.
- [143] A. Reist. *Mathematical analysis and numerical simulation of the motion of a glacier*. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005. doi : 10.5075/epfl-thesis-3184.
- [144] E. Rignot, J. Mouginot, and B. Scheuchl. Ice flow of the antarctic ice sheet. *Science*, 333(6048) :1427–1430, 2011. ISSN 0036-8075, 1095-9203. doi : 10.1126/science.1208336.
- [145] E. Rignot, I. Velicogna, M. R. van den Broeke, A. Monaghan, and J. T. M. Lenaerts. Acceleration of the contribution of the greenland and antarctic ice sheets to sea level rise. *Geophysical Research Letters*, 38(5), 2011. ISSN 1944-8007. doi : 10.1029/2011GL046583.



- [146] J. C. Robertson and R. C. Kerr. Isothermal dynamics of channeled viscoplastic lava flows and new methods for estimating lava rheology. *Journal of Geophysical Research*, 117(B1) :B01202, 2012. ISSN 0148-0227. doi : 10.1029/2011JB008550.
- [147] V. Rommelaere and D. R. Macayeal. Large-scale rheology of the ross ice shelf, antarctica, computed by a control method. *Annals of Glaciology*, 24 :43–48, 1996.
- [148] N. Roquet and P. Saramito. An adaptive finite element method for bingham fluid flows around a cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(31-32) :3317–3341, 2003. ISSN 0045-7825. doi : 10.1016/S0045-7825(03)00262-7.
- [149] F. Rémy and L. Testut. Mais comment s’écoule donc un glacier ? aperçu historique. *Comptes Rendus Geoscience*, 338(5) :368–385, 2006. ISSN 1631-0713. doi : 10.1016/j.crte.2006.02.004.
- [150] F. Rémy, C. Ritz, and L. Brisset. Ice-sheet flow features and rheological parameters derived from precise altimetric topography. *Annals of Glaciology*, 23 : 277–283, 1996.
- [151] F. Rémy, P. Shaeffer, and B. Legrésy. Ice flow physical processes derived from the ERS-1 high-resolution map of the antarctica and greenland ice sheets. *Geophysical Journal International*, 139(3) :645–656, 1999. ISSN 1365-246X. doi : 10.1046/j.1365-246x.1999.00964.x.
- [152] F. Rémy, B. Legresy, and L. Testut. Ice sheet and satellite altimetry. *Surveys in Geophysics*, 22(1) :1–29, 2001. ISSN 0169-3298, 1573-0956. doi : 10.1023/A:1010765923021.
- [153] D. Sandri. Sur l’approximation numérique des écoulements quasi-newtoniens dont la viscosité suit la loi puissance ou la loi de carreau. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, 27(2) :131–155, 1993. ISSN 0764-583X.
- [154] D. Sandri. A posteriori estimators for mixed finite element approximations of a fluid obeying the power law. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166(3) :329–340, 1998. ISSN 0045-7825. doi : 10.1016/S0045-7825(98)00094-2.
- [155] P. Schenk, R. Wilson, and A. Davies. Shield volcano topography and the rheology of lava flows on io. *Icarus*, 169(1) :98–110, 2004. ISSN 0019-1035. doi : 10.1016/j.icarus.2004.01.015.
- [156] C. Schoof. The effect of cavitation on glacier sliding. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, 461(2055) :609–627, 2005. ISSN 1364-5021, 1471-2946. doi : 10.1098/rspa.2004.1350.

- 
- [157] C. Schoof. Marine ice-sheet dynamics. part 1. the case of rapid sliding. *Journal of Fluid Mechanics*, 573 :27–55, 2007. doi : 10.1017/S0022112006003570.
- [158] C. Schoof and R. C. A. Hindmarsh. Thin-film flows with wall slip : An asymptotic analysis of higher order glacier flow models. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 63(1) :73–114, 2010. ISSN 0033-5614, 1464-3855. doi : 10.1093/qjmam/hbp025.
- [159] H. Seroussi, H. Ben Dhia, M. Morlighem, E. Larour, E. Rignot, and D. Aubry. Coupling ice flow models of varying orders of complexity with the tiling method. *Journal of Glaciology*, 58(210) :776–786, 2012. doi : 10.3189/2012JoG11J195.
- [160] A. Shepherd and D. Wingham. Recent sea-level contributions of the antarctic and greenland ice sheets. *Science*, 315(5818) :1529–1532, 2007. ISSN 0036-8075, 1095-9203. doi : 10.1126/science.1136776.
- [161] V. A. Solonnikov. Solvability of a problem on the plane motion of heavy viscous incompressible capillary liquid partially filling a container. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 14(1) :193–221, 1980. ISSN 0025-5726. doi : 10.1070/IM1980v014n01ABEH001069.
- [162] A. Soulaïmani and Y. Saad. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for solving three-dimensional free surface flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162(1) :79–106, 1998. ISSN 0045-7825. doi : 10.1016/S0045-7825(97)00330-7.
- [163] C. W. M. Swithinbank. "Ice streams". *Polar Record*, 7(48) :185–186, 1954. doi : 10.1017/S0032247400043746.
- [164] O. Torinesi, M. Fily, and C. Genthon. Variability and trends of the summer melt period of antarctic ice margins since 1980 from microwave sensors. *Journal of Climate*, 16(7) :1047–1060, 2003. ISSN 0894-8755, 1520-0442. doi : 10.1175/1520-0442(2003).
- [165] C. J. Van Der Veen. *Fundamentals of Glacier Dynamics*. CRC Press, 2013. ISBN 9781439835661.
- [166] G. Vasile. *Imagerie Radar à Synthèse d'Ouverture interférométrique et polarimétrique. Application au suivi des glaciers alpins*. PhD thesis, Université de Savoie, Université Polytechnique de Bucarest, July 2007.
- [167] D. G. Vaughan and R. Arthern. Why is it hard to predict the future of ice sheets? *Science*, 315(5818) :1503–1504, 2007. ISSN 0036-8075, 1095-9203. doi : 10.1126/science.1141111.

- [168] D. G. Vaughan, H. F. J. Corr, F. Ferraccioli, N. Frearson, A. O'Hare, D. Mach, J. W. Holt, D. D. Blankenship, D. L. Morse, and D. A. Young. New boundary conditions for the west antarctic ice sheet : Subglacial topography beneath pine island glacier. *Geophysical Research Letters*, 33(9), 2006. ISSN 1944-8007. doi : 10.1029/2005GL025588.
- [169] A. Vieli and A. J. Payne. Assessing the ability of numerical ice sheet models to simulate grounding line migration. *Journal of Geophysical Research : Earth Surface*, 110(F1), 2005. ISSN 2156-2202. doi : 10.1029/2004JF000202.
- [170] A. Vieli, A. J. Payne, Z. Du, and A. Shepherd. Numerical modelling and data assimilation of the Larsen B ice shelf, Antarctic peninsula. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 364(1844) :1815–1839, 2006. ISSN 1364-503X, 1471-2962. doi : 10.1098/rsta.2006.1800.
- [171] Y.-J. Wang and J.-S. Zhang. An efficient algorithm for large scale global optimization of continuous functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206(2) :1015–1026, 2007. ISSN 0377-0427. doi : 10.1016/j.cam.2006.09.006.
- [172] J. Weertman. On the sliding of glaciers. *Journal of Glaciology*, 3 :33–38, 1957. ISSN 0022-1430.
- [173] E. Wigner. Effect of small perturbations on pile period. *Chicago Report*, CP-G-3048, 1945.
- [174] A. Wilchinsky and V. Chugunov. Modelling ice flow in various glacier zones. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 65(3) :479–493, 2001. ISSN 0021-8928. doi : 10.1016/S0021-8928(01)00054-5.
- [175] H. J. Zwally, W. Abdalati, T. Herring, K. Larson, J. Saba, and K. Steffen. Surface melt-induced acceleration of greenland ice-sheet flow. *Science*, 297 (5579) :218–222, 2002. ISSN 0036-8075, 1095-9203. doi : 10.1126/science.1072708.

# Adjoint of a linear solver

Let us recall that, roughly, the adjoint of a linear system is its transposed counterpart. It thus follows that a derivation of linear solver instructions one-by-one using an automatic differentiation tool (source-to-source) should be avoided when the linear solver can be salvaged. This appendix describes how to generate the adjoint of a general routine containing a call to a linear solver whose contents is a priori unknown.

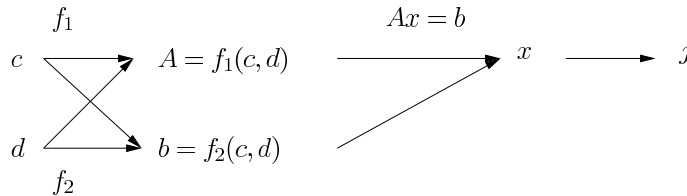
This appendix has been written in collaboration with Ronan Madec<sup>1</sup>.

## A.1 The direct routine

A general direct routine can be described as follows. Given two input parameters  $c$  and  $d$  (called *active variables* in Tapenade terminology) such that :

$$\begin{pmatrix} A \\ b \end{pmatrix} = f(c, d) = \begin{pmatrix} f_1(c, d) \\ f_2(c, d) \end{pmatrix}$$

with  $A$  a matrix and  $b$  a vector. Let  $x$  be the solution of the linear system :  $Ax = b$  and  $j$  defining a cost evaluated from  $x$ . Figure A.1 illustrates the direct routines dependencies.



**Figure A.1:** Direct routine scheme

---

1. Ronan Madec is a post-doc at INSA Toulouse co-funded by ANR AMAC

## A.2 The linear tangent routine

Considering this general direct routine, one can write the corresponding *linear tangent routine*. The linear tangent code derived by Tapenade is defined as follows :

- $\dot{c}$  and  $\dot{d}$  are the corresponding tangent variables of parameters  $c$  and  $d$ . They are input parameters.
- $\dot{A}$  and  $\dot{b}$  satisfy :

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = df(c,d) \cdot \begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{d} \end{pmatrix}$$

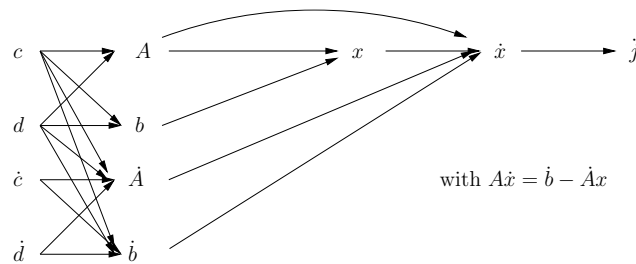
Once  $\dot{A}$  and  $\dot{b}$  have been computed from the linear tangent code, we need to differentiate formally the solution of the linear system. If we differentiate the linear system :

$$Ax = b \tag{A.1}$$

we find :  $A\dot{x} + \dot{A}x = \dot{b}$  or :

$$A\dot{x} = \dot{b} - \dot{A}x \tag{A.2}$$

The matrix  $A$  and the vector  $x$  are given by the direct routine and variables  $\dot{A}$  and  $\dot{b}$  are given by the tangent linear routine. The linear solver is finally called to compute  $\dot{x}$ . The latter represents the derivative value of  $x$  at point  $(c,d)$  in the direction  $(\dot{c}, \dot{d})$  given. Thus,  $\dot{x}$  is obtained without differentiate the linear solver instructions. We can call directly the linear solver and finally compute  $\dot{j}$  the gradient value at point  $(c,d)$  in the direction  $(\dot{c}, \dot{d})$  given. The scheme representing the linear tangent routines is plotted on Figure A.2.



**Figure A.2:** Linear tangent routine scheme

## A.3 The adjoint routines generated

Let us recall that the adjoint code corresponds to the tangent linear code in the reverse order. The output variables of the adjoint routine are  $\bar{c}$  and  $\bar{d}$  and represent the adjoint variables of  $(c, d)$  (and are consequently of same type and size). The adjoint cost  $\bar{j}$  is the input variable of the adjoint cost function and similarly, the adjoint state  $\bar{x}$  is the input variable of the adjoint linear system.

The adjoint code can be split into three steps (see Fig. A.2) :

- 1) From  $\bar{j}$  to  $\bar{x}$  (generally an independent routine : cost computation, adjoint)
- 2) From  $\bar{x}$ , find  $\bar{A}$  and  $\bar{b}$
- 3) From  $\bar{A}$  and  $\bar{b}$ , find  $\bar{c}$  and  $\bar{d}$ .

The first and third steps can be obtained directly by running the Tapenade adjoint code. The adjoint of the third step writes :

$$\begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = df^*(c, d) \cdot \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{b} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

## A.4 The adjoint of the linear system

The second step involves a call to the linear solver. The goal is to detail the computation process of  $\bar{A}$  and  $\bar{b}$  using the linear solver as a “black box” and consequently to derive formally the adjoint of the linear solver call.

The input variable is  $\bar{x}$ , whereas the output variables are  $\bar{A}$  and  $\bar{b}$ . In the linear tangent code, we have :  $A\dot{x} = \dot{b} - \dot{A}x$  or equivalently :

$$\begin{aligned} 2a) \quad \dot{b}' &= \dot{b} - \dot{A}x \\ 2b) \quad A\dot{x} &= \dot{b}' \end{aligned}$$

An adjoint calculation being performed in the reverse order, we start with instruction 2b) which can be written as follows :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{b}' \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

### Remarks :

- By convention, the output variables are in the left-hand side, while at the input variables are in the right-hand side.

- Let us point out that input variables in the linear tangent routine become output variables in the adjoint routine. Furthermore, by convention, output variables are set to 0.

Since  $\dot{b}'$  is the input variable of instruction 2b), its adjoint  $\bar{b}'$  is the output one (and set to 0 when entering the routine). Similarly, since  $\dot{x}$  is the output variable, its adjoint  $\bar{x}$  is the input one. The adjoint instruction of (A.4) writes :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^{-T} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{b}' \end{pmatrix}$$

Hence :

$$\begin{cases} \bar{x} &= 0 \\ \bar{b}' &= A^{-T}\bar{x} + \bar{b}' \end{cases}$$

Thus the system becomes :

$$\begin{cases} A^T \bar{b}' &= \bar{x} \\ \bar{x} &= 0 \end{cases}$$

And one has to solve the linear system :  $A^T \bar{b}' = \bar{x}$ . The solution can be obtained using the linear solver called as a black box. It gives  $\bar{b}'$ .

Now, let us consider the adjoint of the instruction 2a) :

$$2a) \quad \dot{b}' = \dot{b} - \dot{A}x \tag{A.5}$$

This linear instruction writes as follows :

$$(\dot{b}', \dot{b}, \dot{A}) = (\dot{b}', \dot{b}, \dot{A}) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

The corresponding adjoint instruction writes :

$$(\bar{b}', \bar{b}, \bar{A}) = (\bar{b}', \bar{b}, \bar{A}) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -x^T \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Therefore, the adjoint instruction of (A.5) writes :

$$\begin{cases} \bar{b}' &= 0 \\ \bar{b} &= \bar{b}' + \bar{b} \\ \bar{A} &= -\bar{b}'x^T + \bar{A} \end{cases}$$

The variables  $\bar{A}$ ,  $\bar{b}$  are output variables, hence set to 0 when entering into the adjoint routine.

In summary, the adjoint of the tangent linear instructions  $A\dot{x} = \dot{b} - \dot{A}x$  (*i.e.* Step 2)) can be written :

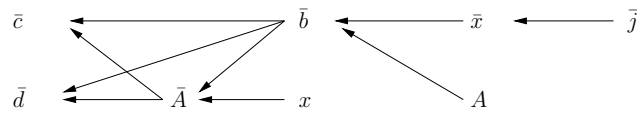
$$\begin{cases} A^T \bar{b} = \bar{x} \\ \bar{A} = -\bar{b}x^T \\ \bar{x} = 0 \end{cases}$$

The first instruction can be solved using the same linear solver as the one used in the direct routine. The second instruction writes :  $\bar{A}_{ij} = -\bar{b}_i x_j$ .

**Remarks :**

- Let us notice that the matrix  $\bar{A}$  is of the same type as  $A$  with the same sparse profile (even if  $-\bar{b}x^T$  is a priori a full matrix). As a matter of fact, only the adjoint values of coefficients  $A_{i,j}$  are required (and the others coefficients are not).
- We recall that  $(\bar{c}, \bar{d})$  are the components of the gradient with respect to  $(c, d)$  respectively ; they are obtained by (A.3).
- Since the direct model is  $Ax = b$ , the state of the system is  $x$ , the adjoint state is  $\bar{b}$  (the solution of the transposed linear system) and  $\bar{x}$  is the right-hand side containing observations and discrepancy terms (corresponding to  $(x - x^{obs})$  for an identity observation operator).

The steps are summarized on Figure A.3.



**Figure A.3:** Adjoint routine representation





# Rapport d'analyse numérique pour le logiciel DassFlow-3D

This appendix presents the finite element formulation and the validation of the steady tridimensional version of *DassFlow-3D*. It has been written in collaboration with Ronan Madec<sup>1</sup> who is the main contributor to the development of *DassFlow-3D*.

The Galerkin formulation is based on the mixed weak formulation of the power-law tridimensional Stokes problem which is recalled in first place. Then, the elementary integrals are given and the matrix system is expressed using these integrals. The finite element discretization is performed using Taylor-Hood mixed tetrahedron elements. The numerical evaluation of the elementary integrals is done using the reference element method which is classical and not recalled here. A brief overview of the various boundary condition and their implementation is given, specifically regarding the friction boundary condition and therefore the implementation of the non-penetration constraint.

The validation of the code based on analytical solutions and convergence curves is presented. We eventually show sensitivity results on a fictitious Mertz topography built from the vertical flowline profile already presented. The full 4D-Var algorithm, not presented here, is also implemented and validated within *DassFlow-3D*, with the same architecture as the bidimensionnal version.

## B.1 Weak formulation

We recall the Stokes system :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{div}(\underline{\sigma}) = \mathbf{f} \\ \mathbf{div}(\mathbf{u}) = 0 \\ + \text{b.c.} \end{array} \right. \quad \text{in } \Omega. \quad (\text{B.1})$$

where the Cauchy stress tensor expresses the deviatoric constraint such that :

---

1. Ronan Madec is a post-doc at INSA Toulouse co-funded by ANR ADAGe

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} + p \mathbf{Id} = 2\eta(\mathbf{u}) \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) \quad (\text{B.2})$$

The apparent viscosity  $\eta$  is a function of the velocity  $u$  written as a power-law :

$$\eta(\mathbf{u}) = \eta_0 \|\underline{\mathbf{D}}\|_F^{s-2} \quad (\text{B.3})$$

with  $\eta_0$  defining the consistency or rate factor,  $s$  the rheological exponent,  $\underline{\mathbf{D}}$  the deformation tensor (see (4.3)) and  $\|\cdot\|_F$  represents the Frobenius matrix norm (see (2.11)).

Let us define  $\Gamma = \partial\Omega$  the domain boundary. We have  $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_n \cup \Gamma_{fr}$  with  $\Gamma_d$  the Dirichlet boundary,  $\Gamma_n$  the Neumann boundary and  $\Gamma_{fr}$  the friction boundary.

The boundary conditions are defined as follows :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u} = \mathbf{u}_d & \text{on } \Gamma_d \\ -\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = p_{ext} \mathbf{n} & \text{on } \Gamma_n \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \Gamma_{fr} \\ -\sigma_{n\tau^k} = -\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}_k = \beta_k \mathbf{u} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}_k & \text{on } \Gamma_{fr}, k = 1, 2 \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

with  $\mathbf{u}_d$  the Dirichlet velocity,  $p_{ext}$  the external pressure and  $\beta_k$  the friction coefficients. One can take  $\beta_1 \neq \beta_2$  in the case of an anisotropic sliding. We will consider  $\beta_1 = \beta_2$  and  $u_d = 0$  in the following.

We then introduce the local coordinate system  $(\mathbf{n}, \underline{\boldsymbol{\tau}}^1, \underline{\boldsymbol{\tau}}^2)$  on a boundary. We thus have :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{nn} \mathbf{n} + \sigma_{n\tau^1} \underline{\boldsymbol{\tau}}^1 + \sigma_{n\tau^2} \underline{\boldsymbol{\tau}}^2 \quad (\text{B.5})$$

with :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}^1) \underline{\boldsymbol{\tau}}^1 + (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}^2) \underline{\boldsymbol{\tau}}^2 \quad (\text{B.6})$$

The first tangential vector  $\underline{\boldsymbol{\tau}}^1$  is arbitrarily taken in the  $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  plane with  $\tau_x^1 > 0$ . Another possible choice could have been to take  $\underline{\boldsymbol{\tau}}^1$  in the greatest slope direction.

Let us consider a test function  $v \in X_s^0$  such that :

$$X_s = (W^{1,s}(\Omega))^N, X_s^0 = \{v \in X_s, v = 0 \in \Gamma_d\} \quad (\text{B.7})$$

where  $N$  is the dimension of the problem (2 or 3) and  $s$  is the exponent from the power law ( $s = 2$  in the Newtonian case, see (B.3)).

The weak form of the momentum equation writes :

$$\forall \mathbf{v} \in X_s^0, \int_{\Omega} -\mathbf{div}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \quad (\text{B.8})$$

Applying Green formula, we obtain :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_n} \underline{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_{fr}} \underline{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (\text{B.9})$$

with

$$\underline{\sigma} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \partial_j v_i. \quad (\text{B.10})$$

On the friction boundary, we have :

$$\int_{\Gamma_{fr}} \underline{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\Gamma_{fr}} \sigma_{nn} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{\Gamma_{fr}} \sigma_{n\tau^1} \mathbf{v} \cdot \underline{\tau}^1 \, ds + \int_{\Gamma_{fr}} \sigma_{n\tau^2} \mathbf{v} \cdot \underline{\tau}^2 \, ds \quad (\text{B.11})$$

According to (B.2), we obtain for the left-hand side for all  $\mathbf{v} \in X_s$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \partial_j v_i \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \sum_i -p \partial_i v_i \, d\mathbf{x} + \sum_{i,j} \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \partial_j v_i \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

This brings in the Euclidean tridimensional space  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , for all  $\mathbf{v} \in X_s$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} p (\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} 2\eta(\mathbf{u}) (\partial_x u_x \partial_x v_x + \partial_y u_y \partial_y v_y + \partial_z u_z \partial_z v_z) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) (\partial_x u_y \partial_y v_x + \partial_y u_x \partial_x v_y) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) (\partial_x u_z \partial_z v_x + \partial_z u_x \partial_x v_z) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) (\partial_y u_z \partial_z v_y + \partial_z u_y \partial_y v_z) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) (\partial_z u_x \partial_x v_z + \partial_x u_z \partial_z v_x) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) (\partial_z u_y \partial_y v_z + \partial_y u_z \partial_z v_y) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

The equation (B.8) can be written :

$$a(\eta(\mathbf{u}); \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = l(\mathbf{v}) \quad (\text{B.14})$$

We eventually obtain the mixed weak formulation for problem (B.1) :

Find  $(\mathbf{u}, p) \in X_s \times M$  such that :

$$\begin{cases} a(\eta(\mathbf{u}); \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X_s \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in M \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

## B.2 Finite element formulation

This section describes the discrete Galerkin formulation of the power-law Stokes problem and its implementation within *DassFlow-Ice* using the Taylor-Hood finite element pair. It finally describes the implementation of the friction condition as a Dirichlet condition on a rotated domain.

### B.2.1 Galerkin approximation

The discrete counterpart of problem (B.1) writes :

Find  $(\mathbf{u}, p) \in X_s \times M$  such that :

$$\begin{cases} a(\eta(\mathbf{u}_h); \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = l(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_s^h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in M_h \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

where the discrete velocity and pressure fields can be written using the finite element decomposition as follows :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_v} \mathbf{u}_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad p_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_p} p_j \psi_j(\mathbf{x}) \quad (\text{B.17})$$

The resulting linear system associated to (B.16) then writes :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

where :

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad B_{ki} = b(\varphi_i, \psi_k), \quad l_i = l(\varphi_i). \quad (\text{B.19})$$

The matrix  $A$  is symmetric positive and defined such that  $A \in N_v \times N_v$  and  $B$  is a rectangular matrix such that  $B \in N_p \times N_v$ . We define hereafter the various integrals of the discrete problem (B.16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ij}^x = \int_{\Omega} \psi_j \partial_x \varphi_i \, d\mathbf{x} \\ \alpha_{ij}^y = \int_{\Omega} \psi_j \partial_y \varphi_i \, d\mathbf{x} \\ \alpha_{ij}^z = \int_{\Omega} \psi_j \partial_z \varphi_i \, d\mathbf{x} \\ \beta_{ij}^{xx} = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) \partial_x \varphi_i \partial_x \varphi_j \, d\mathbf{x} \\ \beta_{ij}^{yy} = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) \partial_y \varphi_i \partial_y \varphi_j \, d\mathbf{x} \\ \beta_{ij}^{zz} = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) \partial_z \varphi_i \partial_z \varphi_j \, d\mathbf{x} \\ \beta_{ij}^{xy} = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) \partial_x \varphi_i \partial_y \varphi_j \, d\mathbf{x} \\ \beta_{ij}^{xz} = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) \partial_x \varphi_i \partial_z \varphi_j \, d\mathbf{x} \\ \beta_{ij}^{yx} = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) \partial_y \varphi_i \partial_x \varphi_j \, d\mathbf{x} \\ \beta_{ij}^{yz} = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) \partial_y \varphi_i \partial_z \varphi_j \, d\mathbf{x} \\ \beta_{ij}^{zx} = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) \partial_z \varphi_i \partial_x \varphi_j \, d\mathbf{x} \\ \beta_{ij}^{zy} = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u}) \partial_z \varphi_i \partial_y \varphi_j \, d\mathbf{x} \end{array} \right. \quad (\text{B.20})$$

On the friction boundary  $\Gamma_{fr}$ , we defined the following integrals ( $k = 1, 2$  in 3D and  $k = 1$  in 2D) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma_{ij}^{xx})_k = \int_{\Gamma_{fr}} \beta_k \varphi_i \varphi_j \tau_x^k \tau_x^k ds \\ (\gamma_{ij}^{yy})_k = \int_{\Gamma_{fr}} \beta_k \varphi_i \varphi_j \tau_y^k \tau_y^k ds \\ (\gamma_{ij}^{zz})_k = \int_{\Gamma_{fr}} \beta_k \varphi_i \varphi_j \tau_z^k \tau_z^k ds \\ (\gamma_{ij}^{xy})_k = \int_{\Gamma_{fr}} \beta_k \varphi_i \varphi_j \tau_x^k \tau_y^k ds = \gamma_{ij}^{yx} \\ (\gamma_{ij}^{xz})_k = \int_{\Gamma_{fr}} \beta_k \varphi_i \varphi_j \tau_x^k \tau_z^k ds = \gamma_{ij}^{zx} \\ (\gamma_{ij}^{yz})_k = \int_{\Gamma_{fr}} \beta_k \varphi_i \varphi_j \tau_y^k \tau_z^k ds = \gamma_{ij}^{zy} \end{array} \right. \quad (B.21)$$

The same goes for the tridimensional linear form  $l$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (l_x)_i = \int_{\Omega} f_x \varphi_i d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_n} p_{ext} n_x \varphi_i ds \\ (l_y)_i = \int_{\Omega} f_y \varphi_i d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_n} p_{ext} n_y \varphi_i ds \\ (l_z)_i = \int_{\Omega} f_z \varphi_i d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_n} p_{ext} n_z \varphi_i ds \end{array} \right. \quad (B.22)$$

with :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = -\rho g \end{array} \right. \quad (B.23)$$

The linear system (B.18) can be decomposed as follows :

$$M \begin{pmatrix} \frac{u_x}{p} \\ \frac{u_y}{p} \\ \frac{u_z}{p} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1^T \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2^T \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3^T \\ B_1 & B_2 & B_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{u_x}{p} \\ \frac{u_y}{p} \\ \frac{u_z}{p} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l_x}{p} \\ \frac{l_y}{p} \\ \frac{l_z}{p} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (B.24)$$

where :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (A_{11})_{ij} = 2\beta_{ij}^{xx} + \beta_{ij}^{yy} + \beta_{ij}^{zz} + (\gamma_{ij}^{xx})_1 + (\gamma_{ij}^{xx})_2 \\
 (A_{22})_{ij} = \beta_{ij}^{xx} + 2\beta_{ij}^{yy} + \beta_{ij}^{zz} + (\gamma_{ij}^{yy})_1 + (\gamma_{ij}^{yy})_2 \\
 (A_{33})_{ij} = \beta_{ij}^{xx} + \beta_{ij}^{yy} + 2\beta_{ij}^{zz} + (\gamma_{ij}^{zz})_1 + (\gamma_{ij}^{zz})_2 \\
 (A_{12})_{ij} = \beta_{ij}^{yx} + (\gamma_{ij}^{xy})_1 + (\gamma_{ij}^{xy})_2 = \beta_{ji}^{xy} + (\gamma_{ij}^{xy})_1 + (\gamma_{ij}^{xy})_2 \\
 (A_{13})_{ij} = \beta_{ij}^{zx} + (\gamma_{ij}^{xz})_1 + (\gamma_{ij}^{xz})_2 = \beta_{ji}^{xz} + (\gamma_{ij}^{xz})_1 + (\gamma_{ij}^{xz})_2 \\
 (A_{21})_{ij} = \beta_{ij}^{xy} + (\gamma_{ij}^{xy})_1 + (\gamma_{ij}^{xy})_2 \\
 (A_{23})_{ij} = \beta_{ij}^{yz} + (\gamma_{ij}^{yz})_1 + (\gamma_{ij}^{yz})_2 = \beta_{ji}^{yz} + (\gamma_{ij}^{yz})_1 + (\gamma_{ij}^{yz})_2 \\
 (A_{31})_{ij} = \beta_{ij}^{xz} + (\gamma_{ij}^{xz})_1 + (\gamma_{ij}^{xz})_2 \\
 (A_{32})_{ij} = \beta_{ij}^{yz} + (\gamma_{ij}^{yz})_1 + (\gamma_{ij}^{yz})_2 \\
 (B_1)_{ij} = -\alpha_{ji}^x \\
 (B_2)_{ij} = -\alpha_{ji}^y \\
 (B_3)_{ij} = -\alpha_{ji}^z
 \end{array} \right. \quad (\text{B.25})$$

According to (B.13), we have for example :

$$(A_{12})_{ij}(u_y)_j = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u})(\partial_x u_y)_j (\partial_y v_x)_i d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \eta(\mathbf{u})(u_y)_j \partial_x \varphi_j \partial_y \varphi_i d\mathbf{x} = \beta_{ij}^{yx}(u_y)_j$$

and similarly :

$$(B_1)_{ki}(u_x)_i = \int_{\Omega} -(q)_k (\partial_x u_x)_i d\mathbf{x} = \int_{\Omega} -(u_x)_i \psi_k \partial_x \varphi_i d\mathbf{x} = -\alpha_{ik}^x(u_x)_i$$

### B.2.2 The Taylor-Hood (Lagrangian $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ ) finite element

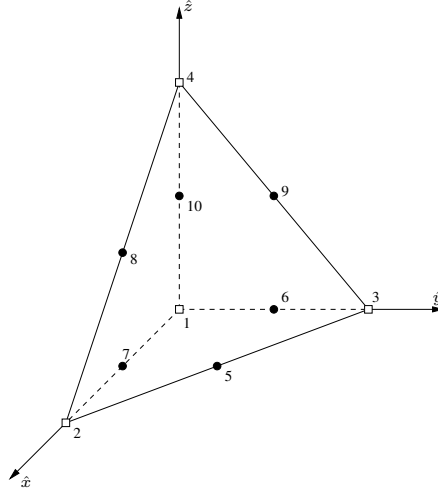
Let  $nnv$  denote the number of degrees of freedom in  $\mathbb{P}_2$  and  $nnp$  the number of degrees of freedom in  $\mathbb{P}_1$ . The Taylor-Hood finite element pair in 3D uses tetrahedral element with  $nnp = 4$  degrees of freedom for the pressure  $\mathbb{P}_1$  field and  $nnv = 10$  degrees of freedom for each component of the velocity  $\mathbb{P}_2$  field (see *e.g.* [47]).

The numbering of the vertices of the tetrahedron is shown on Figure B.1 with nodes  $\{1, 2, 3, 4\}$  supporting  $p_h$  and  $u_h$  variables and nodes  $\{6, 7, 8, 9, 10\}$  supporting only  $u_h$ . For the reference element,  $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{x}_3 = (0, 1, 0)$  and  $\mathbf{x}_4 = (0, 0, 1)$ .

The Jacobian matrix  $(J_K)_{ij}$  (or  $(DF_K)_{ij}^T$ ) of the transformation  $F_K : \hat{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{x}$  from the reference element to element  $K$  is given by (see *e.g.* [39]) :

$$J_K = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{z}} \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{z}} \\ \frac{\partial z}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial z}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial z}{\partial \hat{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

and



**Figure B.1:** Reference tetrahedron for Taylor-Hood elements

$$\det(J) = 6|K|. \quad (\text{B.27})$$

with  $|K|$  the volume of element  $K$ .

The transformation function  $F_K$  is written using  $J_K$  as follows :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F_K \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = J_K \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.28})$$

with  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  the coordinates of the first node of element  $K$ .

### B.2.3 The friction condition

We consider two strategies. The first one consists in imposing the non-penetration condition  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  using a Lagrange multiplier technique. This method is already presented in Section 4.4.1.

The second one consists in rewriting the matrix system (B.18) using a transformation  $T$  on every friction node and then imposing the non-penetration as a Dirichlet condition (see *e.g.* [110]).

Matrix  $T$  is a rotation matrix from  $(x, y, z)$  coordinates to  $(n, \tau^1, \tau^2)$  coordinates (construct as a direct basis) with  $\mathbf{n}$  the external normal of the boundary. The first tangential vector  $\underline{\tau}^1$  is taken in the  $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  plane.

On each node of the friction boundary,  $3 \times 3$  matrices  $T_i$  are defined as follows :

$$\begin{pmatrix} n_i \\ \tau_i^1 \\ \tau_i^2 \end{pmatrix} = T_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^i & T_{12}^i & T_{13}^i \\ T_{21}^i & T_{22}^i & T_{23}^i \\ T_{31}^i & T_{32}^i & T_{33}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \\ \tau_x^1 & \tau_y^1 & \tau_z^1 \\ \tau_x^2 & \tau_y^2 & \tau_z^2 \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$



For the nodes in  $\Omega \setminus \Gamma_{fr}$ , we take  $T_i = I$ . Then  $T$  is built as follows :

$$T = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & T_{11}^i & 0 & 0 & T_{12}^i & 0 & 0 & T_{13}^i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots \\ \hline \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & T_{21}^i & 0 & 0 & T_{22}^i & 0 & 0 & T_{23}^i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots \\ \hline \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & T_{31}^i & 0 & 0 & T_{32}^i & 0 & 0 & T_{33}^i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c|c} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ \hline T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ \hline T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array} \right). \quad (\text{B.30})$$

where each block matrix  $T_{ij}$  is diagonal.

Then, in order to impose the non-penetration condition  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ , we solve the new linear system defined by (B.18) :

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}^T \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{l}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

with :

$$\tilde{A} = TAT^T, \quad \tilde{B} = BT^T, \quad \tilde{\mathbf{u}} = T\mathbf{u}, \quad \tilde{\mathbf{l}} = T\mathbf{l}. \quad (\text{B.32})$$

On the new system (B.31), we impose an homogeneous Dirichlet condition on the first component of  $\tilde{\mathbf{u}}$  :  $\tilde{\mathbf{u}}_n = 0$ . Then, after solving (B.31), we obtain  $\mathbf{u}$  by computing  $\mathbf{u} = T^T \tilde{\mathbf{u}}$ . The decomposition of system (B.31) is similar to the one of system (B.24). Then, the computation of matrices  $\tilde{A}_{11}$ ,  $\tilde{A}_{12}$ , ... writes :

$$\tilde{A}_{ij} = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d T_{ik} A_{kl} T_{jl}.$$

The computation of matrices  $\tilde{B}_1$ ,  $\tilde{B}_2$  and  $\tilde{B}_3$  writes :

$$\tilde{B}_i = \sum_{k=1}^d B_k T_{ik}.$$

The cost of the operation is rather low because we only touch the nodes of the friction boundary and the matrices  $T_{ij}$  are diagonal.

This formulation is still under development and validation.

### B.3 Validation

Velocity components  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  and pressure  $p$  being given, the right-hand side of the power-law Stokes system can be explicitly computed and the solution resulting

from the finite element computation can be compared to the exact one to validate the code and to estimate the orders of convergence. The chosen explicit solution has to be kinematically admissible (*i.e.* with a free divergence). We first present the results for the original bidimensional vertical version *DassFlow-Ice* and those obtained for *DassFlow-3D*. All the computations are performed with the two-field (velocity-pressure) non-linear formulation and solved using a fixed point algorithm.

### B.3.1 Validation of the bidimensional code

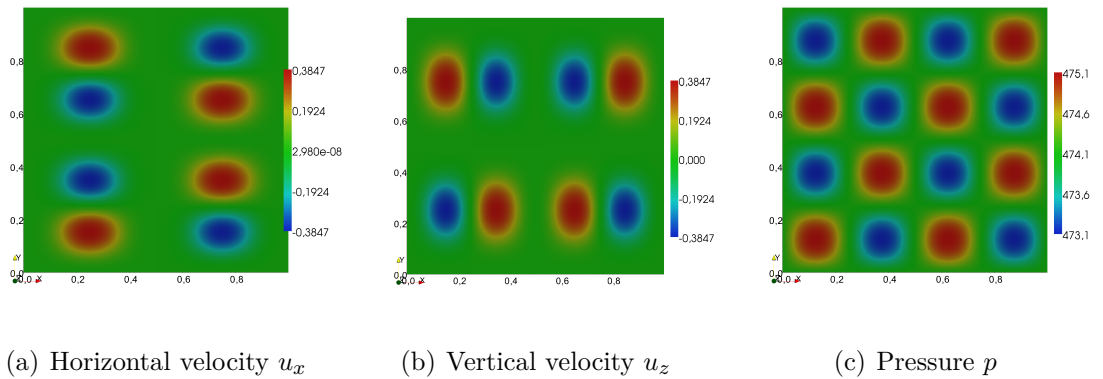
We present in this section the validation of the bidimensional version *DassFlow-Ice* used along this thesis. We first compute the convergence curves from relative finite element errors to an explicit solution. These convergence curves has been compared to the software Elmer-Ice. We then present the various bidimensional ISMIP test-cases (see [132]) performed using *DassFlow-Ice*.

#### B.3.1.1 Analytical test-case

Let us consider a 2D analytical steady solution on the unit square ( $1\text{m} \times 1\text{m}$ ) with a viscosity  $\eta = 1\text{Pa.s}$ . It is given by the following expressions :

$$\begin{pmatrix} u_x(x, z) \\ u_z(x, z) \\ p(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(p\pi x)^3 \sin(p\pi z)^2 \cos(p\pi z) \\ -\sin(p\pi x)^2 \sin(p\pi z)^3 \cos(p\pi x) \\ \sin(q\pi x) \sin(q\pi z) \end{pmatrix}$$

The corresponding velocity field and pressure field are represented on Figure B.2 for the case  $p = 2$  and  $q = 4$ .

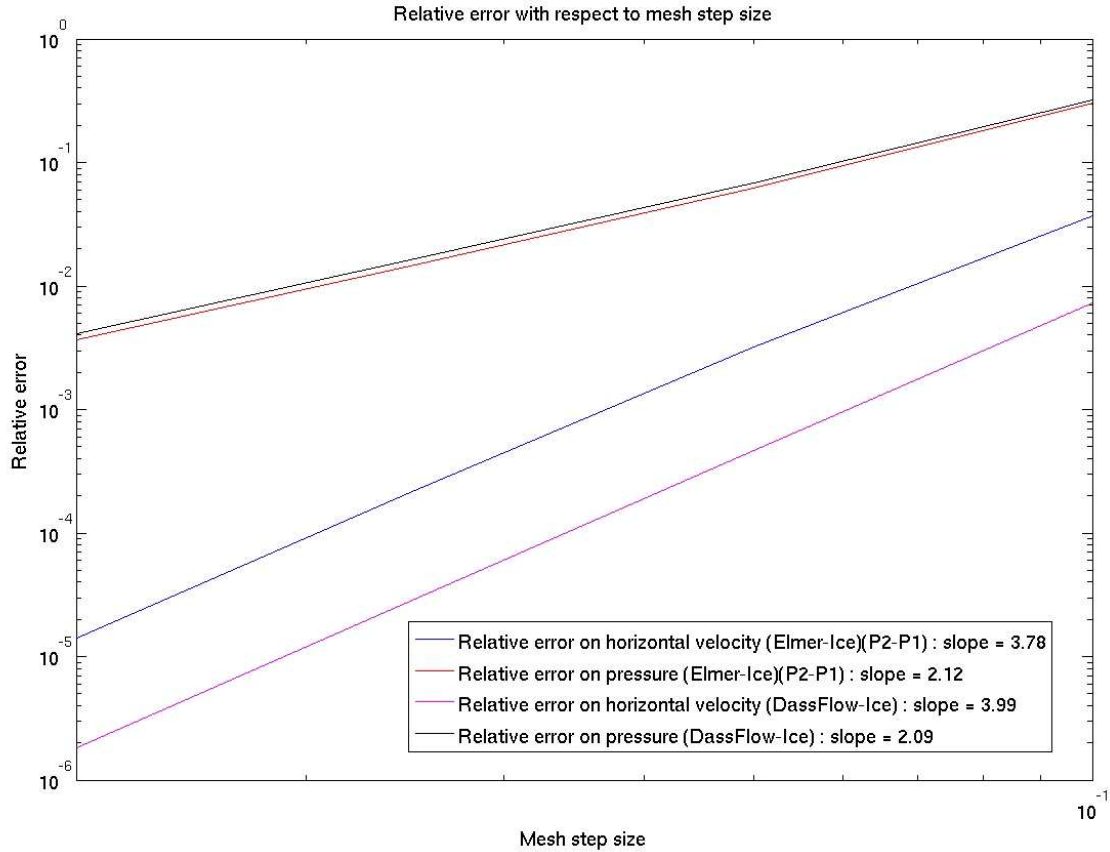


**Figure B.2:** Analytical solution

In order to validate the behavior of the code, we draw the convergence curves of the algorithm of *DassFlow-Ice* on the upper analytical test case for 4 different

meshes of the unit square  $[0,1] \times [0,1]$  corresponding to mesh step of 0.1 ( $10 \times 10$  cells), 0.05 ( $20 \times 20$  cells), 0.025 ( $40 \times 40$  cells) and 0.0125 ( $80 \times 80$  cells) .

As a comparison, we plot the same curves using the finite elements software *Elmer-Ice* with the same Taylor-Hood finite element pair. Results are presented on Figure B.3.



**Figure B.3:** Relative errors with respect to mesh step using  $P_2 - P_1$  Taylor-Hood finite element - Comparison between *DassFlow-Ice* and *Elmer-Ice*

For *DassFlow-Ice*, both components of velocity shows slopes of 3.99 where a value of 2 is expected. The pressure shows a slope of 2.09 where 1 is expected. These values are thus significantly greater than the ones predicted by theory. *Elmer-Ice* shows very close results, also greater than theory, but with larger relative errors (approximatively one order of magnitude).

### B.3.1.2 ISMIP test-cases

**ISMIP Experiment B** We compare the results computed with *DassFlow-Ice* with the results published in [132] for *Elmer-Ice* software.

We consider a 2D experiment with homogeneous Dirichlet on the bedrock, the upper boundary has a natural traction free condition. The domain is considered periodical in the horizontal direction.

The domain shows an average slope of  $0.5^\circ$ . Its average thickness is equal to 1000m. Calculations are performed for different domain lengths (from 5km to 160km). The bedrock is sinusoidal with a period equal to the domain length and corresponds to a 500m amplitude bump. Computed horizontal velocities at surface for each domain are plotted on Figure B.4 :

These values perfectly match the results of *Elmer-Ice* published in [132].

**ISMIP Experiment D** In this experiment a parallel-sided slab of ice with uniform mean thickness of 1000m lying on a flat bedrock with slope of  $0.1^\circ$  is considered. The length of the domain  $L$  is 20 and 40km. The periodical boundary condition are imposed on left and right, friction at bottom and stress-free condition on the top. The basal slipperiness coefficient  $\beta$  is given by :

$$\beta = 1000 + 1000 \sin(\omega x) \quad (\text{B.33})$$

where  $\omega x = 2\pi/L$ . The horizontal velocity at surface computed using *DassFlow-Ice* is plotted on figure B.5 for  $L = 20\text{km}$  and  $L = 40\text{km}$ . These results are in excellent agreement with those of *Elmer-Ice* shown in [132].

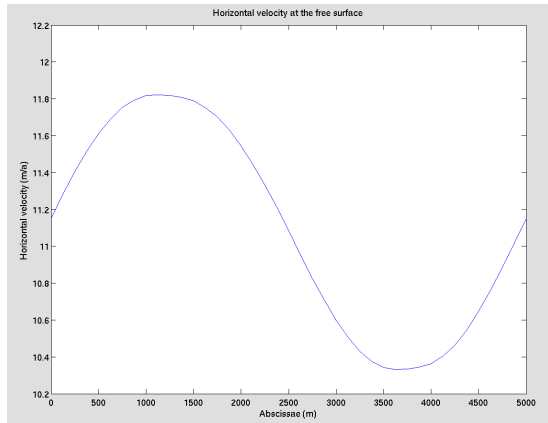
**Unsteady test-case** In order to validate the unsteady computation of the moving domain in *DassFlow-Ice*, we compare our results with the results obtained using *Elmer-Ice*. We consider a 2D experiment with homogeneous Dirichlet condition on the bedrock, free constraint on the upper surface and periodical boundary in the horizontal direction. This test case is inspired from the 3D ISMIP Experiment F adapted in two dimension.

The initial domain shows an average slope of  $3^\circ$ . The bedrock is parallel to the upper surface and subject to a Gaussian perturbation centered with an amplitude of  $\frac{1}{10}$  of the total thickness which is taken to  $H = 1000\text{m}$ . The shape ratio is taken to 100 (thus the domain is  $100\text{km}$  long).

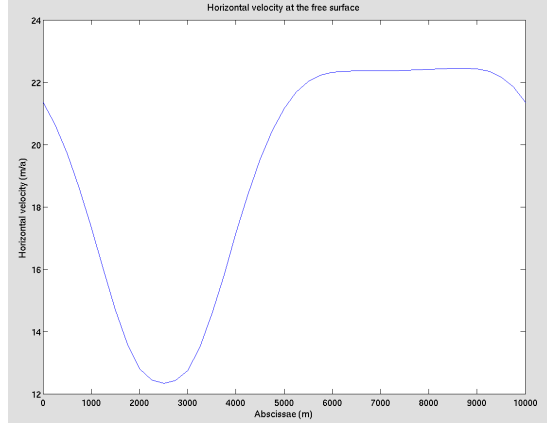
We then run the time loop with 1 year time step in order to reach a steady state. The steady state is reached after 1000 time step (that corresponds to a relative variation of the velocity at free surface lower than  $10^{-6}$ ).

We plot on figure B.6 the normal and tangential velocity and the shape of the free-surface at steady state considered (at  $T = 1000\text{years}$ ).

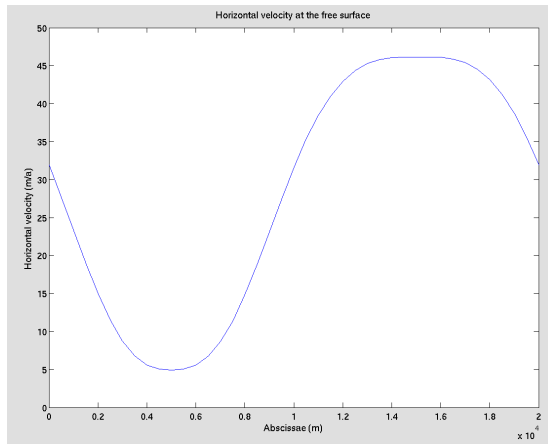
Results are identical to those obtained using *Elmer-Ice*, thus validating the unsteady solver of *DassFlow-Ice*.



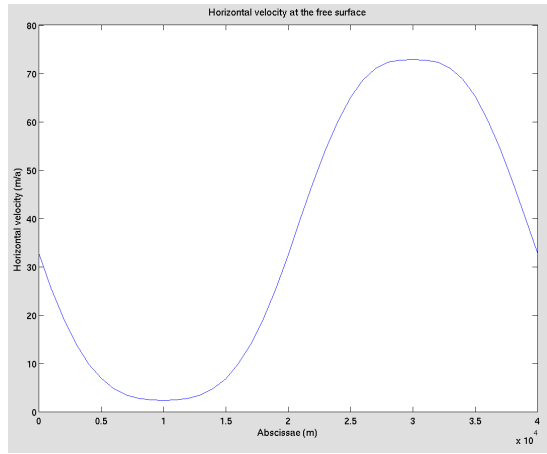
(a)  $L = 5\text{km}$



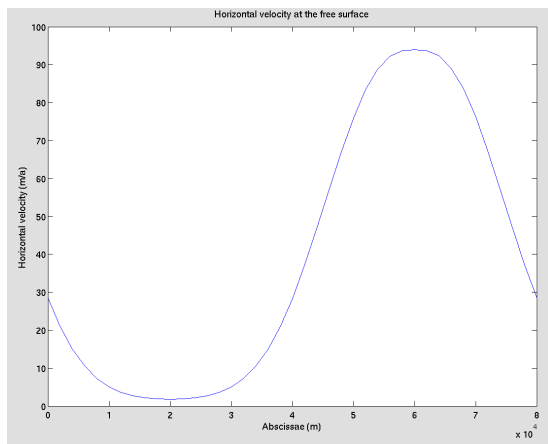
(b)  $L = 10\text{km}$



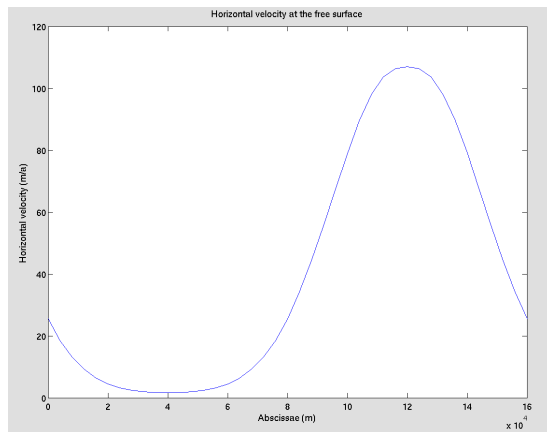
(c)  $L = 20\text{km}$



(d)  $L = 40\text{km}$

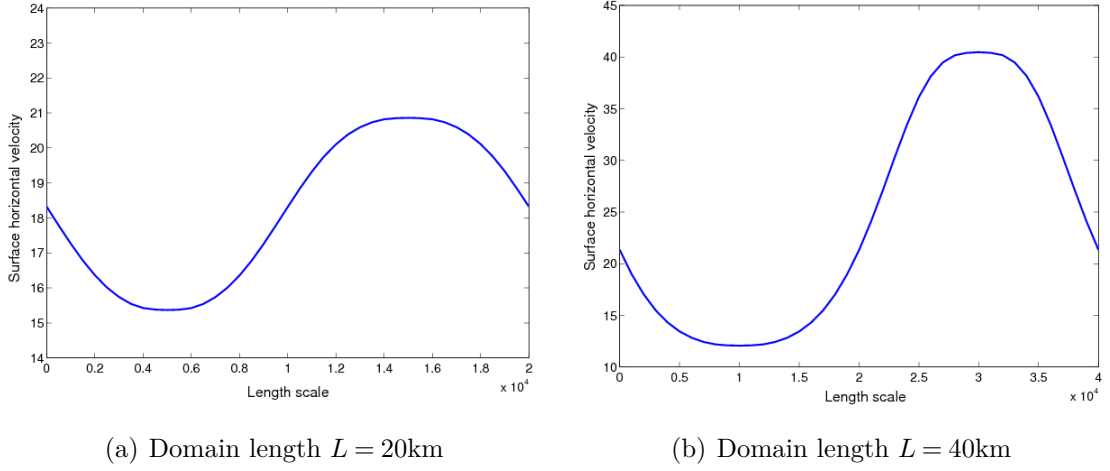


(e)  $L = 80\text{km}$

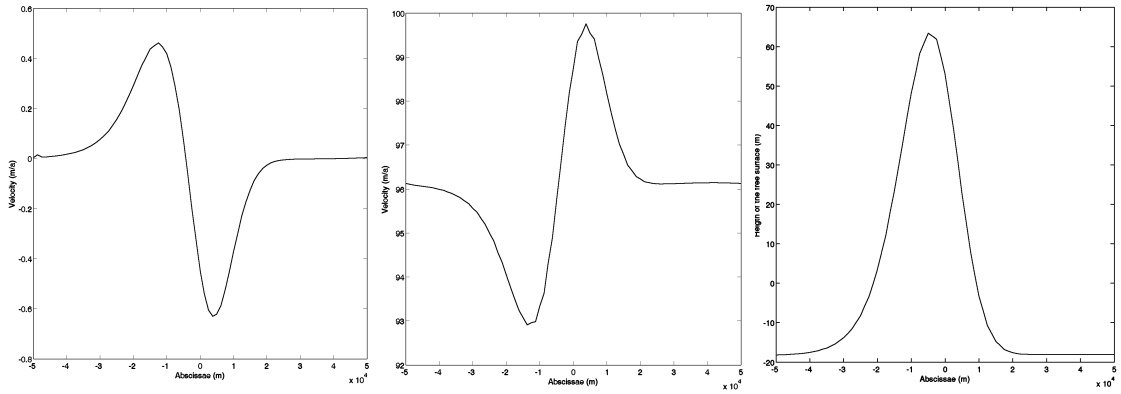


(f)  $L = 160\text{km}$

**Figure B.4:** Horizontal velocity at surface from ISMIP Experiment B computed using *DassFlow-Ice*



**Figure B.5:** Horizontal surface velocities from ISMIP Experiment D computed using *DassFlow-Ice*



(a) Normal velocity at the free surface (at  $T = 1000\text{years}$ )      (b) Tangential velocity at the free surface (at  $T = 1000\text{years}$ )      (c) Shape of the free surface with respect to the normal vector (at  $T = 1000\text{years}$ )

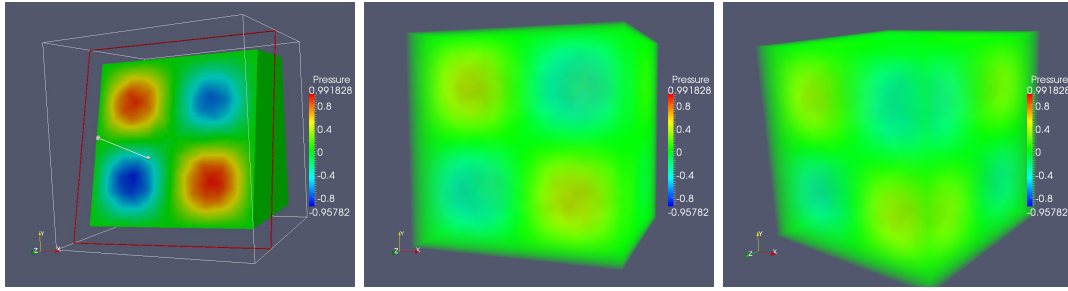
**Figure B.6:** Shape and velocity of the free-surface at steady state ( $T = 1000\text{years}$ )

### B.3.2 Explicit solution in 3D

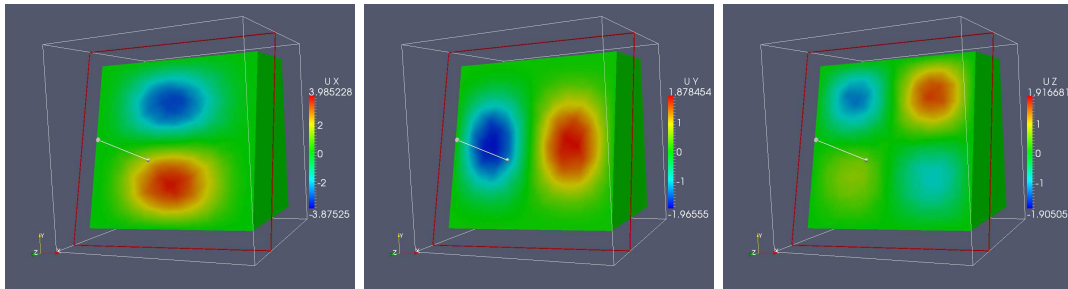
The following test case, known as the Taylor-Green vortex is defined on the unit cube  $([0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1])$  for a consistency  $\eta_0 = 1\text{Pa.s}$  by :

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) &= 2(\cos(\pi p x) - 1) \sin(\pi p y) \sin(\pi p z) \\ u_y(x, y, z) &= -(\cos(\pi p y) - 1) \sin(\pi p x) \sin(\pi p z) \\ u_z(x, y, z) &= -(\cos(\pi p z) - 1) \sin(\pi p x) \sin(\pi p y) \\ p(x, y, z) &= \sin(\pi q x) \sin(\pi q y) \sin(\pi q z) \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

The  $L_2$ -errors are given in Table B.1 for various mesh step size  $\Delta x$  and the corresponding convergence curves are plotted on Figure B.9.



**Figure B.7:** Solution for the Sinusoidal test case in 3D with  $p=2$  and  $q=2$  (pressure part).



**Figure B.8:** Solution for the Sinusoidal test case in 3D with  $p=2$  and  $q=2$  (velocity part).

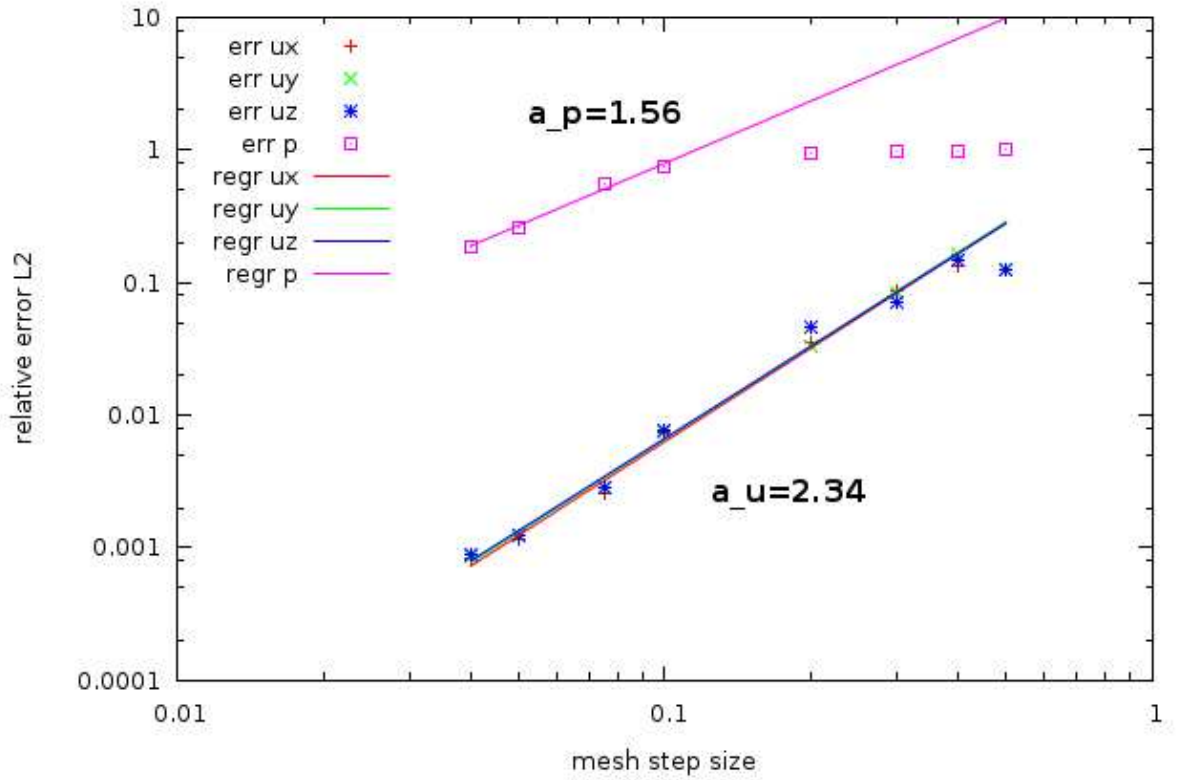
$\Delta x$	$\ err(u)\ _{L_2}$	$\ err(p)\ _{L_2}$	$n\mathbb{P}_2$	$n\mathbb{P}_1$	CPU time
0.500	0.125822392486115	1.000000000000000	63	14	0.06s
0.400	0.139646619215144	0.963238329945797	253	46	0.26s
0.300	8.303269234546176E-002	0.990214204562381	581	100	0.67s
0.200	3.709005963218887E-002	0.961672494487303	1124	183	1.35s
0.100	7.531106213990126E-003	0.746810364359125	6291	962	4.32s
0.075	2.660367095421435E-003	0.562478241506100	13563	2034	29.12s
0.050	1.181866596185162E-003	0.260997801746502	37141	5379	6min 06s
0.040	8.378933778504623E-004	0.187812437411354	57861	8327	29min 58s

**Table B.1:** Relative errors for the Sinusoidal test case for *DassFlow-3D* with  $p=2$  and  $q=2$ .

The relative errors are quite large for the coarser meshes (when  $\Delta x \leq 0.1$ ). They consequently seem too coarse and inappropriate to observe convergence of the method on the pressure. The orders of convergence estimated on the 4 finer meshes are  $a_u = 2.34$  in velocity where 2 is expected and  $a_p = 1.56$  in pressure where 1. Tests should be performed on finer meshes.

### B.3.3 Validation of the friction condition

As a first step of validation for the friction condition, we compare the results of the 3D version with those of the 2D version validated on ISMIP test case. To do



**Figure B.9:** Convergence curves for the Sinusoidal test case for *DassFlow-3D* with  $p=2$  and  $q=2$ .

so, a quasi-uniform flow in a flat channel is simulated using the non-linear Poiseuille (5.22) solution as an inflow and an hydrostatic pressure at the outflow. The channel is 10m long and 1m deep in 2D with a slope of 10%. The 3D channel is identical but extruded in the transverse direction to have a 1m thickness.

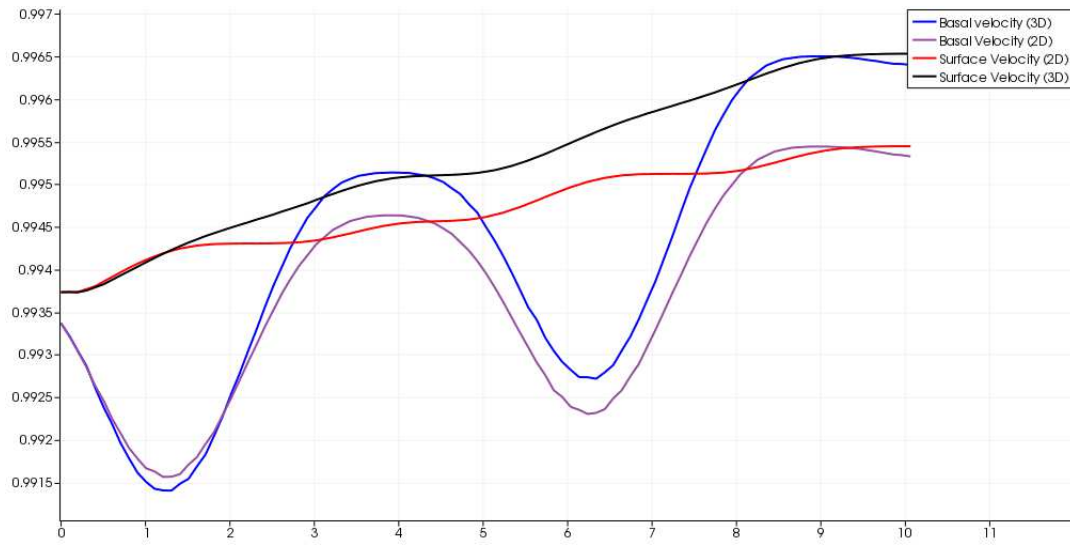
The friction coefficient is taken as follows :

$$\beta(x) = a + 0.9a \sin\left(\frac{2\pi x}{10dx}\right) \quad (\text{B.35})$$

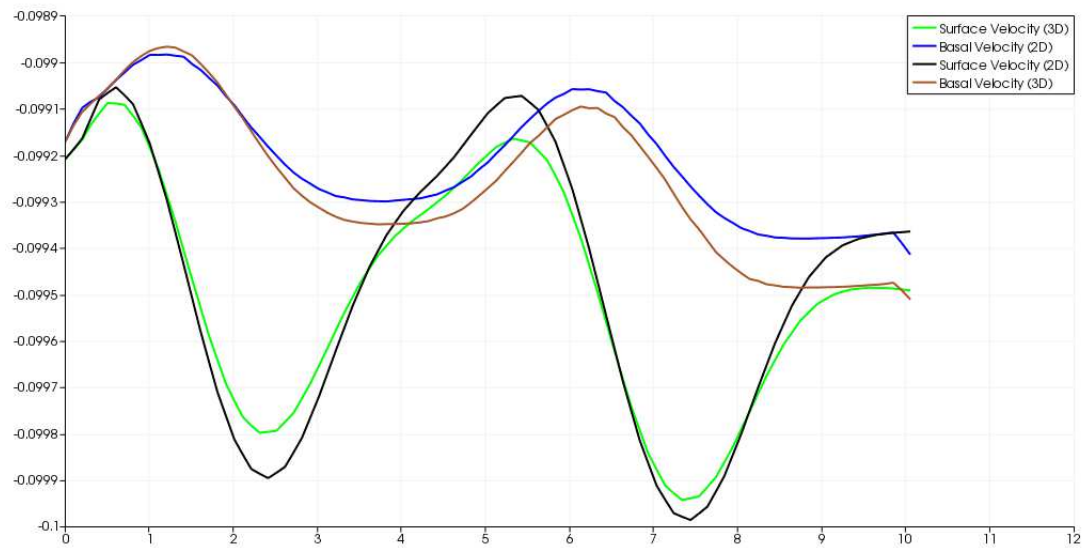
The resulting flow is quasi-uniform in the streamwise direction. We then compare horizontal and vertical component of both basal and surface velocities computed in the bidimensional case and at the central flowline of the tridimensional case. Results are plotted on Figure B.10 and B.11 for horizontal and vertical velocities respectively.

The tridimensional run shows slightly different velocities but presenting the same behavior, thus validating the implementation of the friction. The differences come from the side effects induced by the relatively small width of the 3D channel.





**Figure B.10:** Surface and basal horizontal velocity for a bidimensional channel and the tridimensional square cross-sectioned counterpart



**Figure B.11:** Surface and basal vertical velocity for a bidimensional channel and the tridimensional square cross-sectioned counterpart



